PROVA DE GEOMETRIA

1a. QUESTÃO

Valor 1,0

ENUNCIADO:

Determinar a condição que deve ser imposta a b para que seja possível o sistema:

$$(1) \quad \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} y = 2$$

$$(2) \quad \sec^2 z + \sec^2 y = b$$

SOLUÇÃO:

$$(1) \quad \operatorname{tg}^2 z + \operatorname{tg}^2 y + 2 \operatorname{tg} z \operatorname{tg} y = 4$$

$$\therefore 1 + \operatorname{tg}^2 z + 1 + \operatorname{tg}^2 y = 6 - 2 \operatorname{tg} z \operatorname{tg} y$$

$$\therefore \sec^2 z + \sec^2 y = 6 - 2 \operatorname{tg} z \operatorname{tg} y = b$$

$$\therefore \begin{cases} \operatorname{tg} z \operatorname{tg} y = \dfrac{6 - b}{2} \\ \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases}$$

Sistema que resolvido dá como condição de possibilidade

$$b \geqq 4$$

RESPOSTA: $b \geqq 4$

2a. QUESTÃO

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Um prisma A, um prisma B, e uma pirâmide C, têm ao todo 32 arestas. Sabendo-se que A tem mais arestas que B, dizer o número de lados da base de cada sólido.

SOLUÇÃO:

$3A + 3B + 2C = 32$, $A \geq 3$ $B \geq 3$ $C \geq 3$

$3(A + B) = 32 - 2C$

$\therefore 3(A + B) \leq 26$ $A + B \leq 8$

A pode ser 4 ou 5

$\therefore$ A solução é $\begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 4 \end{cases}$

RESPOSTA:

Prisma A = Pentagonal

Prisma B = Triangular

Pirâmide = Quadrangular

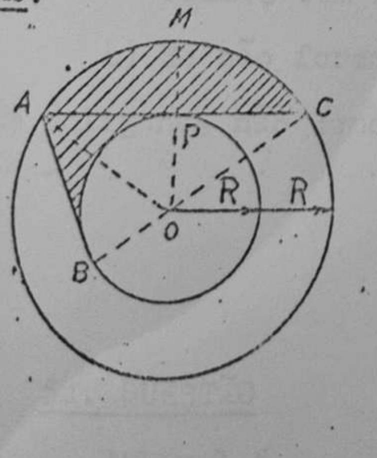
3a. QUESTÃO

Valor 1,0

ENUNCIADO:

Na figura abaixo, AB e AC são tangentes ao círculo menor. Determinar, em função de r, a área da parte hachurada.

SOLUÇÃO:



AC é lado do triângulo equilátero inscrito no círculo maior. A área AMC é igual à área do setor OAMCO − área triângulo OAC. Área AMC = $\frac{4\pi R^2}{3} - R2\sqrt{3}$

Como AB = AP = PC, os triângulos AOB = AOP = OPC(3 lados iguais), e a área ABP = OBAPC−

$$OBP \therefore ABP = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\therefore AMC + ABP = \left(\frac{4\pi R^2}{3} - R^2\sqrt{3}\right)^3 +$$

$$\left(R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3}\right) \therefore AMC + ABP = \pi R^2$$

RESPOSTA: πR^2

4a. QUESTÃO

Valor 0,5

ENUNCIADO:

Determinar, justificando sucintamente, o número de polígonos convexos ou estrelados, não semelhantes, que se pode construir com 15 lados.

SOLUÇÃO:

a) "O número de polígonos convexos ou estrelados regulares que se pode construir com n lados é igual ao número de primos com n, menores que n/2."

$n = 15 \quad n/2 = 7\ 1/2$

Primos com 15 menores que 7 1/2 : 1; 2; 4; 7

b) Se não forem regulares, pode-se construir um número infinito de polígonos não semelhantes.

RESPOSTA: 4 polígonos.

5a. QUESTÃO

Valor 1,5

ENUNCIADO:

Um trapézio de vértices ABCD está inscrito em um círculo, de raio R, sendo AB=R e CD=2R e sendo BC e AD lados não paralelos.

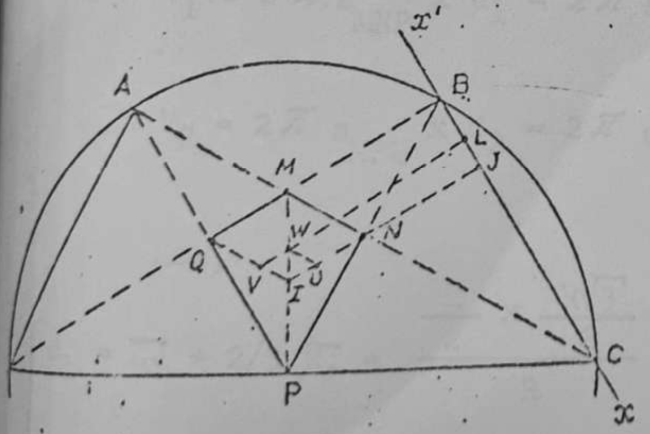
Traçam-se as bissetrizes dos ângulos internos do trapézio, de modo que a bissetriz de $\hat{A}$ intercepta a de $\hat{D}$ no ponto Q, a de $\hat{B}$ intercepta a de $\hat{C}$ no ponto N e a de $\hat{C}$ intercepta a $\hat{D}$ no ponto M.

Sabendo que os pontos M, N e Q são interiores ao trapézio ABCD e que o ponto P é a intercessão das bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, determine:

item a) (Valor 1,0) : A relação entre as áreas dos polígonos MNPQ e ABCD.

item b) (Valor 0,5) : O volume gerado pela revolução do polígono MNQ em tôrno de um eixo que contém BC.

SOLUÇÃO:



$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \therefore$$

$$\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^\circ \quad \therefore \quad \Delta BCN \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{N} = 90^\circ.$$

Por simetria, $\hat{Q} = 90^\circ$.

$$\overset{\frown}{AB} = 60^\circ \quad \therefore \quad \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} = 60^\circ$$

$$\therefore \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{2} \quad \therefore \hat{D} = 60^\circ = \hat{C}$$

$$\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AP} = \overline{BP} = R$$

$$\overline{AQ} = \overline{QP} = 1/2\ R$$

$$\overline{DQ} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$s_{ABCD} = \frac{3R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad s_{ABCD} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Delta MPQ \sim \Delta AQD \Longrightarrow \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{QM}}{\frac{R}{2}} \quad \therefore \quad \overline{QM} = \frac{R}{2\sqrt{3}}$$

$$s_{MNPQ} = \frac{R}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{R}{2} \quad \therefore \quad s_{MNPQ} = \frac{R^2\sqrt{3}}{12}$$

$$\therefore \; q = \frac{s_{MNPQ}}{s_{ABCD}} = \frac{1}{9}$$

<u>RESPOSTA</u> ao item a:

$q = 1/9$

$$V = V_1 + V_2$$

$$V_1 = 2\pi\, s_{MNP} \times d_1 = 2\pi\, s_{MNP}\,(\overline{NJ} + 2/3\,\overline{NI})$$

$$V_2 = 2\pi\, s_{MPQ} \times d_2 = 2\pi\, s_{MPQ}\,(\overline{IJ} + 1/2\,\overline{VW})$$

Mas,

$$\begin{cases} d_1 = \overline{NJ} + 2/3\,\overline{NI} = \dfrac{\frac{R}{2} \times \frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{R}{2\sqrt{3}} = \dfrac{13R\sqrt{3}}{36} \\[2ex] d_2 = \overline{IJ} + 1/2\,\overline{VW} = \dfrac{R}{2\sqrt{3}} + \dfrac{R\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{R}{2\sqrt{3}} = \dfrac{16R\sqrt{3}}{36} \\[2ex] s_{MNP} = s_{MPQ} = 1/2\, s_{MNPQ} = \dfrac{R^2}{8\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\therefore V = 2\pi\, s_{MNP}\,(d_1 + d_2)$$

$$\therefore V = 2\pi \cdot \frac{R^2}{8\sqrt{3}} = \frac{29R\sqrt{3}}{36} = \frac{29}{144}\,\pi R^3$$

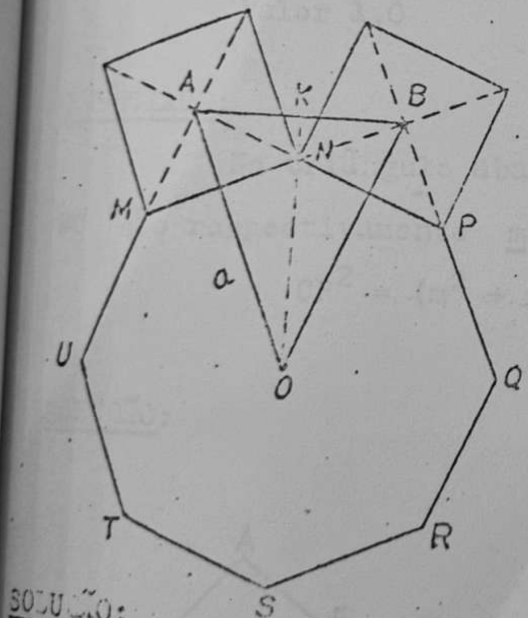
<u>RESPOSTA</u> ao item b:

$$V = 29/144 = \pi R^3$$

<u>6a. QUESTÃO</u>

Valor 1,0

<u>ENUNCIADO:</u>



A figura abaixo mostra o octógono regular MNPQRSTU, e um quadrado construido tendo por base o lado MN.

Sabendo-se que a distância entre o centro do círculo inscrito no octógono e o ponto de intercessão das diagonais do quadrado é $\underline{a}$, determinar a área do quadrado em função de $\underline{a}$.

<u>SOLUÇÃO:</u>

- Δ OAB $\Rightarrow \hat{O} = 45^\circ$; $\hat{A} = \hat{B} = 67^\circ\,30'$
- Δ OAK $\Rightarrow \hat{K} = 90^\circ$; $\hat{A} = 67^\circ\,30'$; $\hat{O}/2 = 22^\circ\,30'$
- Δ ANK $\Rightarrow \hat{N} = 90^\circ$; $\hat{A} = 22^\circ\,30'$

$\therefore \Delta$ OAK $\sim$ ANK $\Rightarrow$ [illegible] = [illegible]

$$\therefore \frac{\overline{NK}}{\overline{AN}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{Mas, } \overline{AN}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{NK}^2 \quad \therefore$$

$$\overline{AN}^2 \left[1 - \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right] = \overline{AK}^2 \quad \therefore \overline{AN}^2 \left[\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right] = \frac{a^2}{4}(2-\sqrt{2}).$$

$$\therefore \overline{AN}^2 = a^2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \quad \text{Mas, } S_{\square} = \overline{MN}^2 = 2\,\overline{AN}^2 \quad \therefore$$

$$\therefore S_{\square} = 2a^2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = a^2(6-4\sqrt{2})$$

<u>RESPOSTA</u>: $S_{\square} = a^2(6 - 4\sqrt{2})$

<u>7a. QUESTÃO</u>

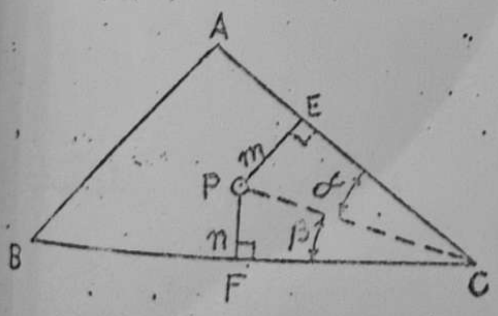
Valor 1,0

<u>ENUNCIADO</u>:

No triângulo abaixo, as distâncias do ponto P aos lados AC e BC são respectivamente <u>m</u> e <u>n</u>. Verificar, justificando, se:

$$CP^2 = (m^2 + n^2 + 2mn\cos C)\,\text{cosec}^2\, C$$

<u>SOLUÇÃO</u>:



O quadrilátero CEPF é inscritível (ângulos opostos suplementares).

Aplicado à lei dos senos aos triângulos CEP e CEF vem:

$$\frac{\overline{CP}}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{\overline{EF}}{\text{sen } C} = 2R$$

$$\therefore \overline{EF} = \overline{CP}\,\text{sen } C.$$

$\therefore \overline{EF}^2 \operatorname{cosec}^2 C = \overline{CP}^2$.

Usando a lei dos cossenos no triângulo PEF vem

$\overline{EF}^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos (180^\circ - C) =$

$= m^2 + n^2 + 2mn \cos C$.

$\therefore (m^2 + n^2 + 2mn \cos C) \operatorname{cosec}^2 C = \overline{CP}^2$.

8a. QUESTÃO

Valor 1,0

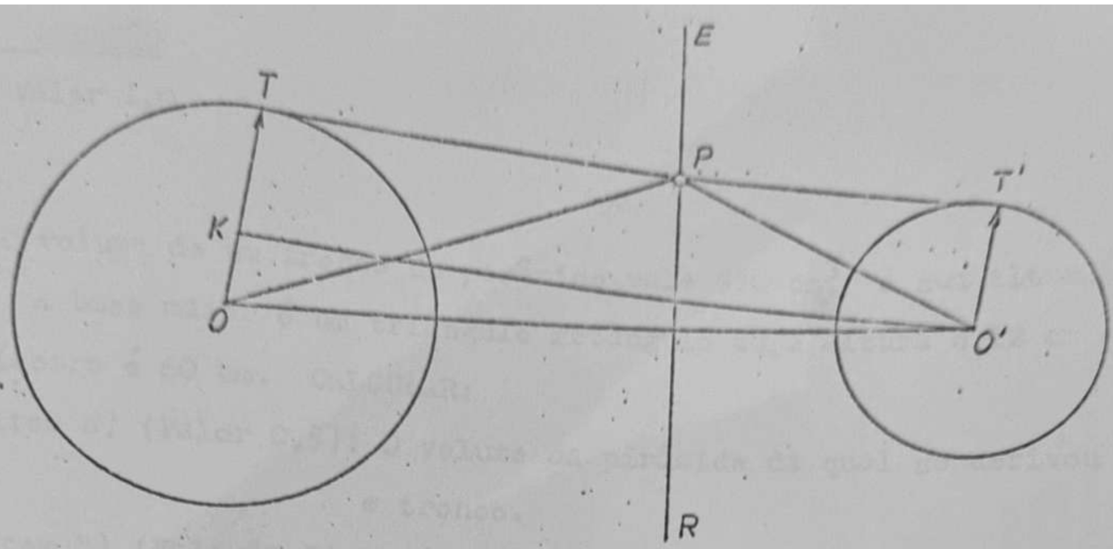
ENUNCIADO:

Dois círculos exteriores possuem diâmetros de 10m e 2m e seu eixo radical dista 5m de um dêles. PEDE-SE:

item a) (Valor 0,5): O comprimento da tangente comum externa dos dois círculos.

item b) (Valor 0,5): Sendo P o ponto em que o eixo radical corta a tangente comum externa e O e O' os centros dos círculos, determinar a área do triângulo POO'.

SOLUÇÃO:



a) $- \; OO' = x$ $\qquad \Delta\, O K O'$: $\qquad TT' = \sqrt{x^2 - O'K^2}$

$\overline{OK}^2 = (5-1)^2 \quad \therefore \quad \overline{OK}^2 = 16.$

$CE = \dfrac{r^2 - r'^2}{2x} \quad \therefore \quad CE = \dfrac{x}{2} - 5 \quad \therefore \quad \dfrac{x}{2} - 5 = \dfrac{5^2 - 1^2}{2x}$

$x = 12$ m.

$TT' = \sqrt{12^2 - 16} \quad \therefore \quad TT' = \sqrt{144 - 16} \quad \therefore \quad TT' = \sqrt{128}.$

$TT' = 11{,}3$ m

b) $- \; PT = PT' = \dfrac{\sqrt{128}}{2} \quad \therefore \quad PT = PT' = \sqrt{32}.$

Potência de P em relação ao círculo de centro O:

$P = d^2 - R^2 \quad \therefore \quad 32 = d^2 - 5^2$

$d = 7{,}55$m.

$P = d'^2 - 1 \quad \therefore \quad d' = 5{,}75$

$S = \sqrt{p(p-2)(p-b)(p-c)} \quad \therefore$

$S = 17 \text{ m}^2$

RESPOSTA:

a) $- \; TT' = 11{,}3$ m.

b) $- \; S = 17 \text{ m}^2$.

9a. QUESTÃO

Valor 1,0.

ENUNCIADO:

O volume de um tronco de pirâmide vale 950 cm^3 e sua altura é de 9 cm. A base maior é um triângulo retângulo cuja altura é 12 cm e cujo perímetro é 60 cm. CALCULAR:

item a) (Valor 0,5): O volume da pirâmide da qual se derivou o tronco.

item b) (Valor 0,5): A área da base menor do tronco de pirâmide.

SOLUÇÃO:

a) $\begin{cases} a + b + c = 60 \\ bc = 12a \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases}$ $a = 25$ cm $b = 20$ cm $c = 15$ cm.

Área da base : $B = \dfrac{20 \times 15}{2}$ $\therefore$ $B = 150$ cm^2.

$$V_{T} = \frac{Bh}{3}(1 + k + k^2).$$

h → altura do tronco; B → área da base do tronco

$k = \dfrac{h}{H}$ $h = \dfrac{H - h}{H}$.

H → altura da pirâmide da qual se derivou o tronco

h → altura do tronco de pirâmide ∴

$$950 = \frac{150 \times 9}{3}(1 + k + k^2) \therefore k = 2/3.$$

$$\frac{2}{3} = \frac{H - 9}{H} \therefore H = 27 \text{ cm.}$$

Volume da pirâmide : $V = \frac{BH}{3} = \frac{150 \times 9}{3}$

$\therefore$

$V = 1350\ cm^3$.

b) - $S'/S = (2/3)^2$

$S = 150 \times 4/9$ $\qquad S \approx 66,6\ cm^2$

$\therefore$

RESPOSTA:

a) - $V = 1350\ cm^3$

b) - $S = 66,6\ cm^2$

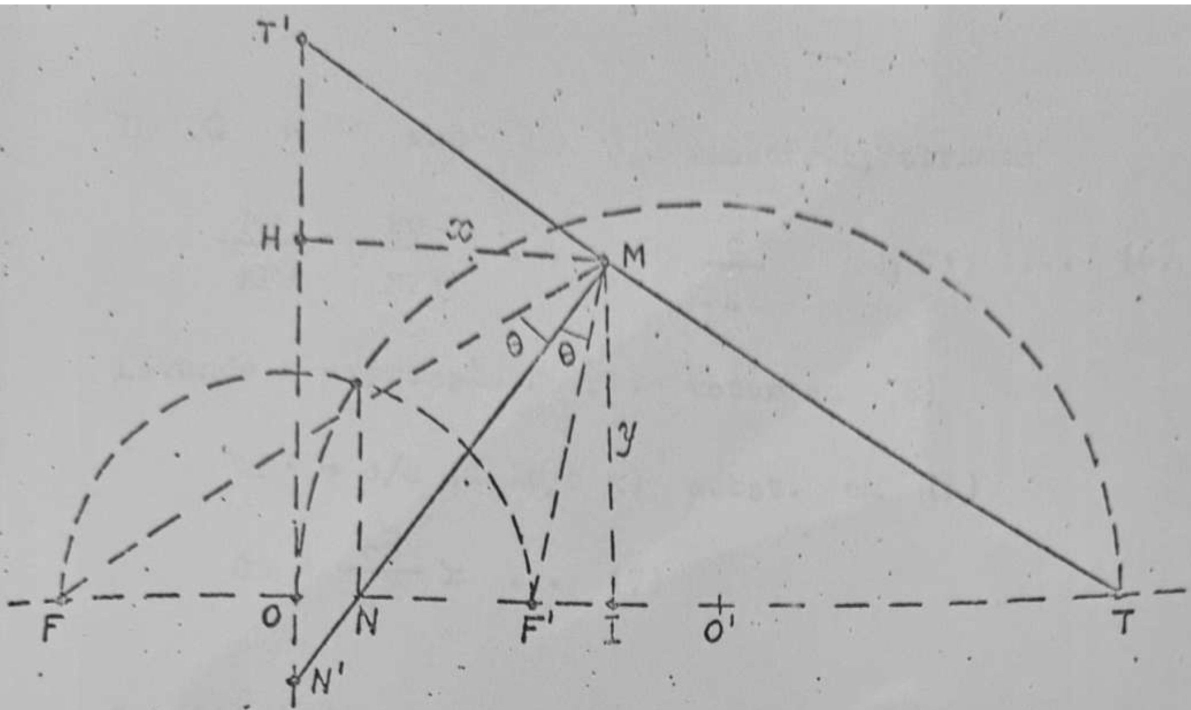
10a. QUESTÃO.

Valor 1,5

ENUNCIADO:

Dá-se uma elipse de centro O e focos F,F' tendo por distância focal 2c e semi-eixos a e b. Um ponto M, variável, da curva projeta-se em H sôbre o eixo menor e em I sôbre o eixo maior. A tangente e a normal conduzidas por M encontram, respectivamente, o eixo menor em T' e N', e o eixo maior em T e N. Calcular em função de a, b, c e de y = OH, o volume do sólido gerado pela superfície do triângulo MT'N' quando girar em tôrno do eixo menor de uma revolução completa.

SOLUÇÃO:



$$V = 1/3\ \pi\ \overline{MH}^2\ \overline{T'N'}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\,(b^2 - y^2) \quad \ldots \quad (1)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2) \quad \ldots \quad (2)$$

$$T'N' = OT' + ON' \quad \ldots \quad (3)$$

Dos triângulos semelhantes NMI e NN'O tiramos

$$ON' = \frac{ON.MI}{NI} \quad \ldots \quad (4)$$

$$NI = x - ON$$

$$ON = C - NF' \quad \ldots \quad (5)$$

O raio vetor da elipse é dado por

$$MF' = a - \frac{c}{a}\,x$$

Do $\triangle$ MFF' onde MN é a bissetriz, tiramos

$$\frac{MF}{MF'} = \frac{NF}{NF'} \quad \therefore \quad NF' = \frac{c}{a} \; MF' \quad \ldots \quad (6)$$

Levando a expressão do raio vetor em (6)

$$NF' = c/a \; (a - c/a \; x) \quad \text{subst. em} \quad (5)$$

$$ON = \frac{c^2}{a^2} x \quad \ldots \quad (7)$$

Substituindo os valores conhecidos em (4)

$$ON' = \frac{c^2}{b^2} y \quad \ldots \quad (8)$$

Dos triângulos TMI e TT'O

$$OT' = MI \; \frac{OT}{IT} \quad \ldots \quad (9)$$

Por outro lado $\overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2 = ON.OT$

$$OT = \frac{c^2}{ON} \quad \ldots \quad (10)$$ Levando (7) em (10)

$$OT = \frac{a^2}{x^2}$$

$$OT' = \frac{a^2}{a^2 - x^2} \cdot y. \quad \ldots \quad (11)$$

Levando (8) e (11) em (3) temos

$$T'N' = \frac{c^2 y^2 + b^4}{b^2 y}$$

Substituindo êste valor na expressão do volume

$$V = \frac{1}{3}\pi \; \frac{a^2}{b^2} \; (b^2 - y^2) \; . \; \frac{c^2y^2 + b^4}{b^2y}$$

RESPOSTA:

$$V = \frac{1}{3}\pi \; \frac{a^2}{b^2} \; (b^2 - y^2) \frac{c^2y^2 + b^4}{b^2y}$$