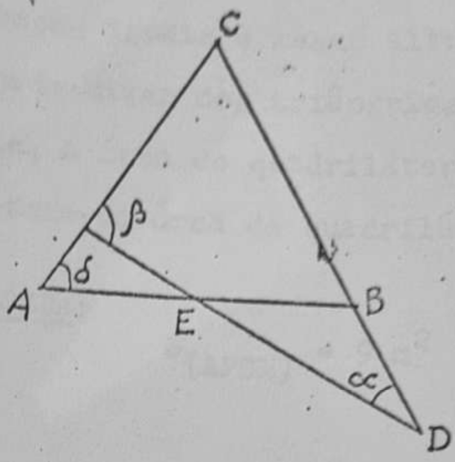
PROVA DE GEOMETRIA - (Exame de Admissão - 1968)

1a. QUESTÃO

Valor 0,5

ENUNCIADO:



Na figura ao lado, sendo AC = BC e BD = BE, expressar $\alpha = f(\beta)$.

SOLUÇÃO:

O exame da figura permite tirar imediatamente:

$\delta = 2\alpha$

$\beta = \delta + \alpha = 2\alpha + \alpha$

$\beta = 3\alpha$

RESPOSTA: $\alpha = \frac{\beta}{3}$

2a. QUESTÃO

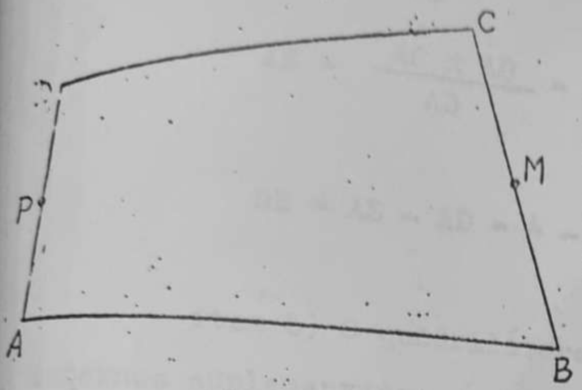
Valor 0,5

ENUNCIADO:

No quadrilátero qualquer ABCD, P é meio de AD e M é meio de BC. Unindo-se P a C e M a A, obtem-se o quadrilátero APCM.

Sendo a área de ABCD = 18 m^2, calcular a área de APCM.

SOLUÇÃO:



Unindo-se A a C, verifica-se que os triângulos PDC e PAC têm áreas iguais, por terem bases iguais e mesma altura. O mesmo se pode dizer dos triângulos CAM e MAB. Portanto, a área do quadrilátero CPAM vale a metade da área do quadrilátero ABCD.

RESPOSTA:

$$S_{(APCM)} = 9\ m^2$$

3a. QUESTÃO

Valor 0,5

ENUNCIADO:

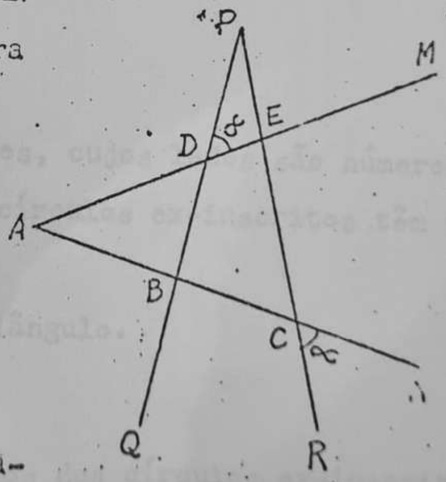
Os lados dos ângulos MAN e QPR interceptam-se com na figura ao lado.

Sendo AD = 3
AB = 2
BC = 4

Pede-se:

a) O valor de DE

b) Dizer, justificadamente, se o quadrilátero BDEC é inscritível.



SOLUÇÃO:

item a) Os triângulos ACE e ABD são semelhantes por terem os três ângulos iguais.

Então: $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AE}{AB}$

$$AE = \frac{AC \times AB}{AD} = \frac{6 \times 2}{3} = 4$$

$$DE = AE - AD = 4 - 3 = 1$$

item b) O quadrilátero BDEC é inscritível por ter os ângulos internos suplementares.

RESPOSTA:

a) DE = 1 u.c.

b) ver acima

4a. QUESTÃO

Valor 1,0

ENUNCIADO:

Dado um triângulo isósceles, cujos lados são números inteiros de metros, sabe-se que os raios dos círculos ex-inscritos têm um produto 16 vêzes o raio do círculo inscrito.

Determinar os lados do triângulo.

SOLUÇÃO:

Sendo r_a, r_b, e r_c os raios dos círculos ex-inscritos, relativos aos lados a, b e c, temos:

$$r_a = \frac{S}{p-a} \quad , \quad r_b = \frac{S}{p-b} \quad e \quad r_c = \frac{S}{p-c}$$

$$r_a\, r_b\, r_c = \frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad .$$

Por outro lado:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \; .$$

Então: $r_a \, r_b \, r_c = \dfrac{S^3}{S^2/p} = Sp$.

Sendo R o raio do círculo inscrito:

$S = pR$ e $Sp = p^2R$

De acôrdo com o enunciado:

$16\,R = p^2R \quad \therefore \quad p = 4 \;, \; 2p = 8 \;.$

De $2p = a + b + c = 8$, tiramos:

$a = b = 3$ e $c = 2$.

As outras possíveis soluções com números inteiros foram desprezadas por não formarem triângulos.

5a. QUESTÃO

Valor 1,0

ENUNCIADO:

Sendo y um arco compreendido entre 2π e $5\pi/2$, determinar seu valor, sabendo que:

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2} - \frac{4\operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}$$

Por transformações sucessivas obtemos:

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos^2 2x} \quad \frac{4 \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{4 \operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x}{\cos^2 2x}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{(1 + 2\operatorname{sen} x \cos x)(1 - 2\operatorname{sen} x \cos x)}{\cos^2 2x}$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = 1$$

$$\operatorname{tg} y = 1$$

$$y = 2\pi + \pi/4$$

RESPOSTA: $y = 9\pi/4$

6a. QUESTÃO

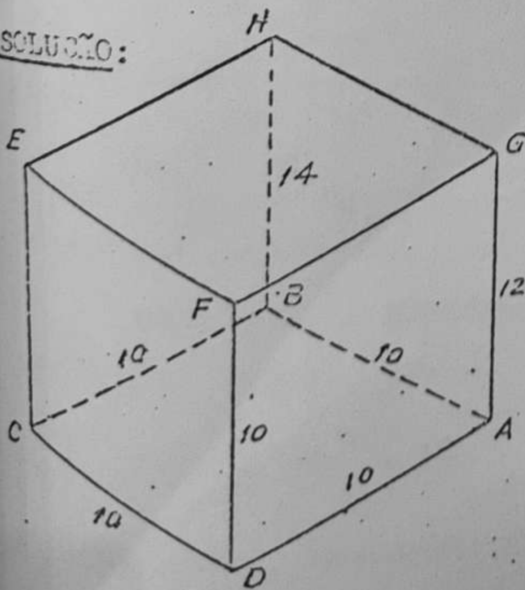
Valor 1,5

ENUNCIADO:

Dado um prisma reto cuja base é um quadrado de lado 10 m e altura 18 m, passa-se um plano que corta o prisma de modo a que três arestas consecutivas ficam medindo 10m, 12m e 14m .

Calcular, em metros quadrados, a área lateral do prisma truncado assim formado.

SOLUÇÃO:



A área lateral é a soma das áreas de 4 trapézios, dos quais são conhecidas as bases e as alturas, com excessão de CE. Como a seção é um paralelogramo, a diagonal EH corta a diagonal HF a uma altura média de DF e HB, ou seja: $\frac{14 + 10}{2} = 12$. Esta altura é também média entre CE e AG. Portanto

$$\frac{CE + 12}{2} = 12 \quad \therefore \quad CE = 12$$

Agora a área lateral pode ser calculada:

$$S_2 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S_2 = \left(\frac{10+12}{2} + \frac{12+14}{2} + \frac{12+14}{2} + \frac{12+10}{2} \right) \times 10 = 480$$

RESPOSTA: $S_2 = 480\ m^2$

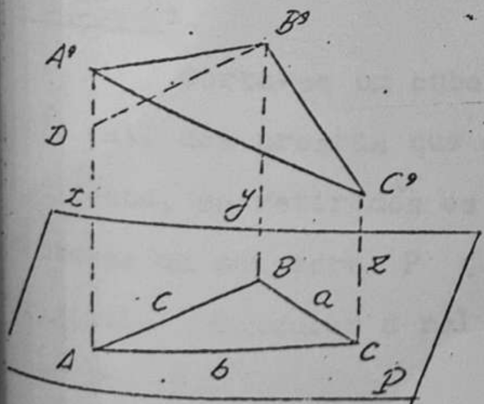
7a. QUESTÃO

Valor 1,0

ENUNCIADO:

Consideram-se três esferas tangentes a um plano P em três pontos A, B, C. e tangentes duas a duas. Calcular os raios X, Y, Z, das esferas em função das distâncias mútuas a, b, c dos três pontos A, B, C.

SOLUÇÃO:



Seja A', B', C' os centros das esferas. Temos:

$A'A = x$, $BB' = y$, $CC' = z$ e para que as esferas sejam tangentes duas a duas é preciso que:

$$B'C' = y + z.$$

$$C'A' = z + x$$

$$A'B' = x + y$$

Seja agora o trapézio $ABB'A'$ e tracemos $B'D$ paralelo a BA no triângulo $A'DB'$, tem-se:

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{A'D}^2 + \overline{DB'}^2 \quad \text{ou} \quad (x+y)^2 = (x-y) + c^2 \;\therefore\; xy = c^2/4$$

de igual modo: $yz = a^2/4$; $zx = b^2/4$.

Multiplicando membro à membro estas 3 relações:

$$x^2\ y^2\ z^2 = \frac{a^2b^2c^2}{64} \quad \therefore \quad xyz = \frac{abc}{8}$$

ou dividindo esta relação pelas anteriores:

$\boxed{x = bc/2a}$ $\boxed{y = ca/2b}$ $\boxed{z = ab/2c}$

RESPOSTA:

$$x = \frac{bc}{2a}$$

$$y = \frac{ca}{2b}$$

$$z = \frac{ab}{2a}$$

8a. QUESTÃO

Valor 1,0

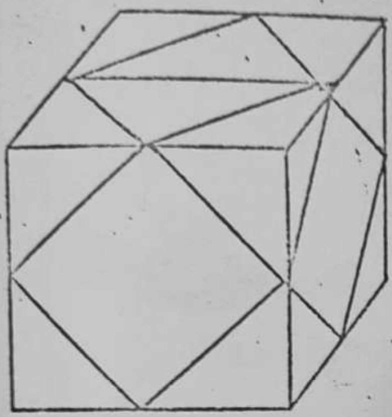
ENUNCIADO:

Corta-se um cubo de aresta a por 8 planos que passam, cada um, pelo meio das arestas que chegam a cada vértice. Considera-se o sólido S que resta, se retirados os 8 tetraedros obtidos. No mesmo sólido S, inscreve-se um octaedro P que tem por vértices os centros das faces do cubo original. Calcular a relação entre os volumes do sólido S e do octaedro inscrito P.

SOLUÇÃO:

O sólido S será limitado por 14 faces: 6 quadrados e 8 triângulos, tôdas com lado

$$\ell = a\sqrt{2}/2$$



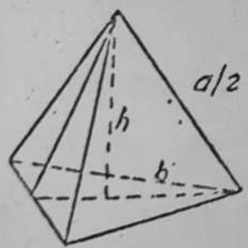
O volume do sólido S pode ser calculado como a diferença entre o volume do cubo e o volume total das oito pirâmide destacadas.

Área da base de cada pirâmide:

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Altura de cada pirâmide:

b, (figura ao lado) vale 2/3 da altura do triângulo da base:



$$b = 2/3 \times \ell\sqrt{3}/2 = \ell\sqrt{3}/3 = a\sqrt{6}/6$$

$$h^2 = a^2/4 - b^2 = a^2/12$$

$$h = a/2\sqrt{3} .$$

Volume de cada pirâmide:

$$V_p = 1/3\ A\ h = 1/3 \times a^2\sqrt{3}/8 \times a/2\sqrt{3} = a^3/48 .$$

Volume do sólido S :

$$V_s = a^3 - 8 \times a^3/48 = 5a^3/6 .$$

O octaedro inscrito pode ser considerado como duas pirâmides unidas, tendo por base e por altura, respectivamente:

$$h' = a/2.$$

$$A' = a^2/2$$

O volume do octaedro, V_p, é igual ao dôbro do volume de uma das pirâmides acima:

$$V_p = 2 \times A'h'/3 = a^3/6$$

Finalmente: $$\frac{V_s}{V_p} = \frac{5a^3/6}{a^3/6} = 5$$

RESPOSTA: 5

9a. QUESTÃO

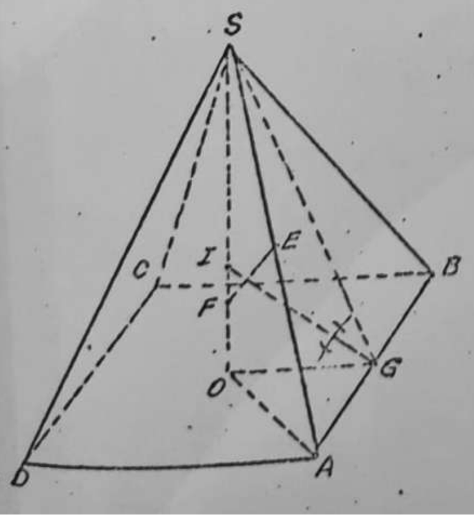
Valor 1,5

ENUNCIADO:

Calcular o raio das esferas circunscrita e inscrita a uma pirâmide regular que tem por altura h e por base um quadrado de lado a.

SOLUÇÃO:

a) O centro da esfera circunscrita à pirâmide SABCD é a interseção da altura SO e do plano mediador da aresta SA. Sejam F êste ponto e E o meio de SA. O raio da esfera será FS. Dos triângulos semelhantes SEF e SOA, obtemos:



$$\frac{SF}{SA} = \frac{SE}{SO}$$

$$R = SF = \frac{\overline{SE} \times \overline{SA}}{SO}$$

$$\overline{SE} = \overline{SA}/2 \quad e \quad \overline{SO} = h$$

Então $$R = \frac{\overline{SA}^2}{2h}$$

Mas, $\overline{SA}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OA}^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{2h^2 + a^2}{2}$

$\therefore$

Portanto $R = \dfrac{2h^2 + a^2}{4h}$

b) O centro da esfera inscrita é a interseção da altura SO com o plano bissetor do diedro AB. Sendo OG perpendicular a AB, a bissetriz do ângulo $\widehat{SGO}$ corta SO no ponto I, centro da esfera. O raio da esfera será OI.

O triângulo SOG fornece:

$$\frac{IO}{IS} = \frac{OG}{SG}$$

Mas $IO = r$ (raio da esfera inscrita)

$IS = h - r$

$OG = a/2$

$GS = \sqrt{h^2 + a^2/4}$

Então :

$$\frac{r}{h - r} = \frac{a/2}{\sqrt{4h^2 + a^2/2}}$$

$$\therefore \quad r\sqrt{4h^2 + a^2} = a(h - r)$$

$$r = \frac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}}$$

RESPOSTA:

10a. QUESTÃO

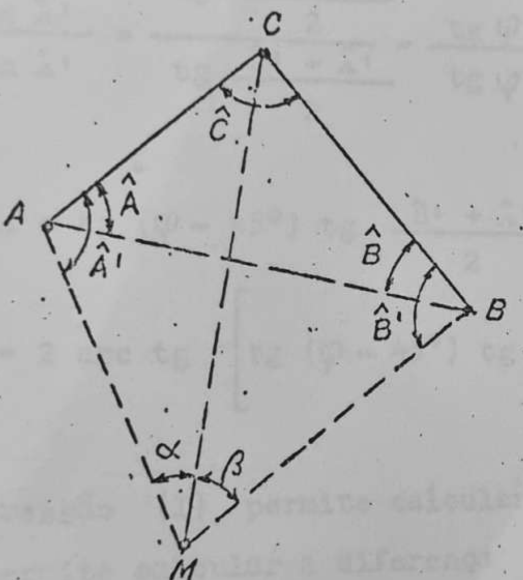
Valor 1,5

ENUNCIADO:

Sejam três pontos A, B, C situados em um plano.

De um ponto M do plano, os segmentos AC e BC foram vistos sob ângulos $AMC = \alpha$ e $BMC = \beta$. Sabendo-se que A e B se situam de lados opostos da reta que passa por M e C, e que M e C se situam de lados opostos da reta que passa por A e B, pede-se determinar trigonomètricamente a distância $MC = x$, em função exclusivamente das distâncias $AB = c$; $BC = a$ e $AC = b$ e dos ângulos α e β.

SOLUÇÃO:



$AC = b$

$CB = a$

$BA = c$

$MC = x$

$2p = a + b + c$

$$\operatorname{tg} \hat{A}/2 = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \therefore \quad \hat{A} = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B}/2 = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \quad \therefore \quad \hat{B} = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C}/2 = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-b)}} \quad \therefore \quad \hat{C} = 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

ou de $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, $\therefore$ $\hat{C} = \ldots 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C} + \alpha + \beta = 360^\circ \quad \therefore \quad \hat{A}' + \hat{B}' = 360^\circ - (\alpha + \beta + \hat{C}) \quad \text{(I)}$$

$$\frac{x}{\operatorname{sen} \hat{A}'} = \frac{b}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{x}{\operatorname{sen} \hat{B}'} = \frac{a}{\operatorname{sen} \beta} \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{B}'}{\operatorname{sen} \hat{A}'} = \frac{b \operatorname{sen} \beta}{a \operatorname{sen} \beta} = \operatorname{tg} \varphi \quad \therefore \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{b \operatorname{sen} \beta}{a \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{B}' - \operatorname{sen} \hat{A}'}{\operatorname{sen} \hat{B}' + \operatorname{sen} \hat{A}'} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\hat{B}' - \hat{A}'}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\hat{B}' + \hat{A}'}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1} = \operatorname{tg} (y - 45^\circ)$$

$\therefore$

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{B}' - \hat{A}'}{2} = \operatorname{tg} (\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg} \frac{\hat{B}' + \hat{A}'}{2} \quad \therefore \quad \hat{B}' - \hat{A}' =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,tg} \left[\operatorname{tg} (\varphi - 45^\circ) \operatorname{tg} \frac{\hat{B}' + \hat{A}'}{2} \right] \qquad \text{(IV)}$$

A expressão (I) permite calcular a soma $\hat{A}' + \hat{B}'$; a expressão (IV) permite calcular a diferença $\hat{A}' - \hat{B}'$. Tendo a soma e a diferença dêsses ângulos, podemos calcular fàcilmente cada um dêles:

$$\hat{A}' = \frac{(\hat{B}' + \hat{A}') - (\hat{B}' - \hat{A}')}{2}$$

$$\hat{B}' = \frac{(\hat{B}' + \hat{A}') + (\hat{B}' - \hat{A}')}{2}$$

Conhecidos $\hat{A}'$ e $\hat{B}'$, pode-se finalmente obter x por uma das expressões abaixo:

$$x = b.\ \frac{\operatorname{sen} \hat{A}'}{\operatorname{sen} \alpha}$$

ou

$$x = a.\ \frac{\operatorname{sen} \hat{B}'}{\operatorname{sen} \beta}$$

, obtidas respectivamente a partir de (II) e (III).