PROVA DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1ª QUESTÃO - ITEM A

Valor 0,5

ENUNCIADO: Um triângulo tem um ângulo interno de 75º e os outros ângulos internos definidos pela equação

$$3 \sec x + m (\cos x - \text{sen } x) - 3 (\text{sen } x + \cos x) = 0$$

Determine o valor de $\underline{m}$.

SOLUÇÃO:

$$3 \sec x + m (\cos x - \text{sen } x) - 3 (\text{sen } x + \cos x) = 0$$

$$3/\cos x + m (\cos x - \text{sen } x) = 3 (\text{sen } x + \cos x)$$

$$3 + m \cos^2 x - m \text{ sen } x \cos x = 3 \text{ sen } x \cos x + 3 \cos^2 x$$

$$3(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) + m \cos^2 x - m \text{ sen } x \cos x = 3 \text{ sen } x \cos x + 3 \cos^2 x$$

$$3 \text{ sen}^2 x - (m + 3) \text{ sen } x \cos x + m \cos^2 x = 0$$

Dividindo por $\cos^2 x$, temos :

$$3 \tan^2 x - (m + 3) \tan x + m = 0$$

$$\tan x_1 = m/3$$

$$\tan x_2 = 1$$

$$x_2 = 45^\circ \quad .... \quad x_1 = 60^\circ$$

$$\tan x_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = m/3$$

RESPOSTA:

$$m = 3 \sqrt{3}$$

1ª QUESTÃO - ITEM B

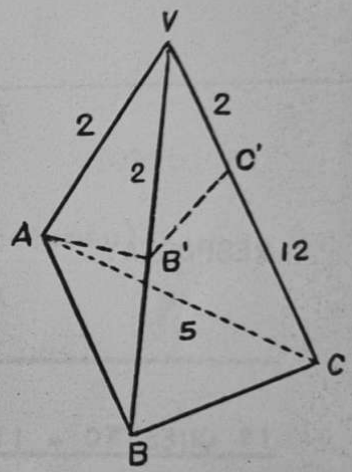
Valor 0,5

ENUNCIADO: Um plano corta um triedro de vértice V e faces iguais a 60^o, resultando um sólido de arestas de comprimentos VA = 2m, VB = 5m e VC = 12m. Calcule o volume dêste sólido.

SOLUÇÃO: Tiremos sôbre as arestas VB e VC os comprimentos:

$$VB' = VC' = VA = 2$$

Logo, o tetraedro VAB'C' é regular.



$$V' = VA^3 \sqrt{2}/12$$

Como VAB'C' e VABC têm o mesmo triedro, segue-se:

$$V/V' = VA.VB.VC/VA.VB'.VC' = VB.VC/VA^2$$

$$V = VB.VC.\ V'/VA^2$$

$$V = VB.VC.VA^3 \sqrt{2}/12\ VA^2 = VB.VC.VA \sqrt{2}/12 = 10\sqrt{2}$$

RESPOSTA: $V = 14,14\ m^3$

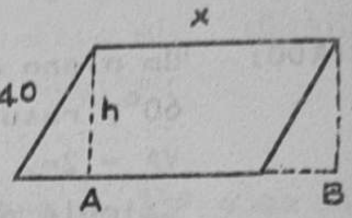
1ª QUESTÃO - ITEM C

Valor 0,5

ENUNCIADO: Os volumes gerados pelas rotações de um paralelogramo em tôrno de seus lados de comprimentos "x centímetros" e 40 centímetros são, respectivamente, 12π centímetros cúbicos. Calcule a área de uma elipse de eixos de comprimentos "x centímetros" e 40 centímetros.

SOLUÇÃO: $V_1 = \pi h^2 AB = \pi h^2 x = \pi h^2 x^2/x =$

$= \pi (xh)^2/x = \pi S^2/x$



Anàlogamente :

$V_2 = \pi S^2/40$

$V_1/V_2 = 12 \quad /600 = 40/x$

$x = 40.50/ \quad = 2a =$ eixo maior da elípse

$2b = 40 =$ eixo menor da elípse

A (elípse) $= \pi ab$

RESPOSTA:

$A = 20.000\ cm^2$

1ª QUESTÃO - ITEM D

Valor 0,5

ENUNCIADO: Transformou-se um triângulo ABC qualquer, com dois lados $CA = 8$ e $CB = 10$, em um triângulo isósceles equivalente CDE, ambos com o ângulo comum C.

Calcule os lados iguais CD e CE do triângulo isósceles.

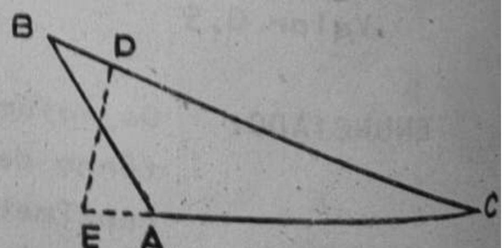
SOLUÇÃO: Os triângulos têm o ângulo C comum.

Suas áreas S e S' fornecem:

$S'/S = CD.CE/CA.CB = CD^2/CA.CB$

Por hipótese: $S = S'$, logo:

$CD^2 = CA.CB = 8 \times 10$



RESPOSTA: $CD = 4\sqrt{5}$

1ª QUESTÃO - ITEM E

Valor 0,5

ENUNCIADO: Um quadrilátero inscritível e circunscritível tem um lado igual a 5 metros, área $6\sqrt{5}$ metros quadrados e diagonais inversamente proporcionais a 9 e 3.
Calcule os outros lados do quadrilátero.

SOLUÇÃO:

a, b, c, d : lados do quadrilátero inscritível e circunscritível.

x, y : diagonais dêsse quadrilátero.

$S = 6\sqrt{5}$.

$ab + cd = xy$: Teorema de Hiparco (ou Ptolomeu)

$xy = 9 \times 3 = 27$: do problema

$S^2 = a.b.c.d.$

$a + c = p$
$b + d = p$ .... : Polígono inscritível e circunscritível

$a + c = b + d.$

Daí , o sistema :

$ac + bd = xy$
$abcd = S^2$
$a + c = b + d$

RESPOSTA:

$b = 6$ m

$c = 3$ m e $d = 2$ m

1ª QUESTÃO - ITEM F

Valor 0,5

ENUNCIADO: Um triângulo de perímetro igual a 15 metros, lados em progressão aritmética, tem a bissetriz externa do ângulo $\hat{A}$ = = 120^o medindo $\frac{\sqrt{675/2}}{2}$ metros.

Calcule a altura em relação ao lado "a".

SOLUÇÃO:

$b - r + b + b + r = 15$: lados em progressão aritmética

$d = 2bc \text{ sen } A/2 \;/\; b - c$: bissetriz externa do ângulo $A = 120^o$

$\sqrt{675}/2 = 15 \quad \sqrt{3}/2 = 2.5.c. \quad \sqrt{3}\,/\,2\,(5 - c)$

$c = 3$

$2p = a + b + c = 15$

$a = 7$

Lei dos senos:

$a/\text{sen } A = b/\text{sen } B = c/\text{sen } C$

$7/\;\sqrt{3}/2 = 5/\text{sen } B = 3/\text{sen } C$

$\text{sen } B = 5\sqrt{3}\,/\,14 \qquad \text{sen } C = 3\sqrt{3}\,/\,14$

$h_a = a \text{ sen } B \text{ sen } C/\text{sen } A$

RESPOSTA: $h_a = (15\sqrt{3}/14)$ metros

2ª QUESTÃO - ITEM A

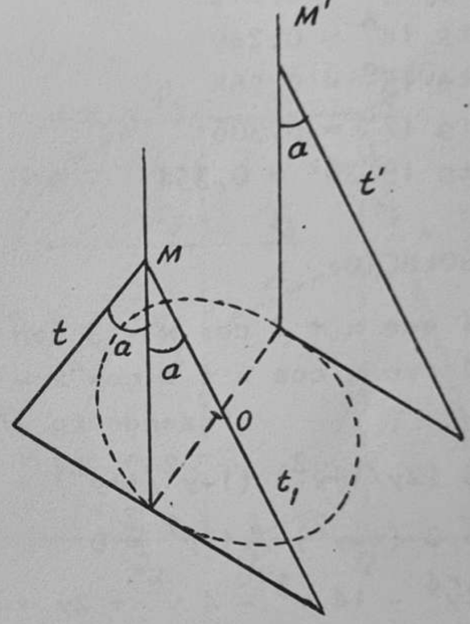
Valor 1,0

ENUNCIADO: Uma hélice se desenvolve sôbre a superfície de um cilindro reto de raio $\sqrt{2}/\pi$.
Calcule o seu passo, sabendo-se que as tangentes traçadas por dois de seus pontos, situados sôbre duas geratrizes do cilindro, diametralmente opostas, são perpendiculares.

SOLUÇÃO: As tangentes às hélices inclinam-se igualmente sôbre as geratrizes do cilindro. Seja a essa inclinação e p o passo da hélice .

Temos:

$$tg\ a = 2\pi r/p .$$



Sejam t e t' as tangentes nos 2 pontos M e M' sôbre as geratrizes consideradas.

Os planos em M e M' são tangentes e paralelos.

Tiremos, por M, a paralela t_1 a t' ; t_1 está contida no plano tangente em M e a geratriz do ponto M é a bissetriz do ângulo 2a (de t e t_1) ou seja, de t e t' .

Para que t e t' sejam perpendiculares, é preciso que:

$$a = 45^\circ \ \ldots\ldots\ldots \ tg\ a = 1$$

RESPOSTA: $p = 2\sqrt{2}$

2ª QUESTÃO - ITEM B

Valor 1,0

ENUNCIADO: Calcule as menores determinações de "x" que satisfazem a:

$$4 \text{ sen } x + 2 \cos x - 3 \text{ tg } x - 2 = 0.$$

DADOS:

tg 12° = 0,212	tg 23°30′ = 0,435
tg 14° = 0,249	tg 26°36′ = 0,500
tg 15° = 0,268	tg 29°18′ = 0,560
tg 17° = 0,306	tg 37°30′ = 0,767
tg 19°30′ = 0,354	tg 50°12′ = 1,200.

SOLUÇÃO:

$4 \text{ sen } x + 2 \cos x - 3 \text{ sen } x/\cos x - 2 = 0$

$4 \text{ sen } x \cos x + 2 \cos^2 x - 3 \text{ sen } x - 2 \cos x = 0$

Fazendo tg x/2 = y temos:

$4\ (2y/1+y^2)\ (1-y^2/1+y^2) + 2\ (1-y^2)^2\ /\ (1+y^2)^2 - 3\ .\ 2y/1+y^2 -$

$- 2\ (1-y^2)\ /\ 1+y^2 = 0$

$4y^4 - 14\ y^3 - 4\ y^2 + 2y = 0$

Preparando-se para a fatoração, temos:

$4y^4 - 16y^3 + 2y^3 + 4y^2 - 8y^2 + 2y = 0$

$2y\ (2y^3 - 8y^2 + 2y + y^2 - 4y + 1) = 0$

$2y\ (2y\ (y^2 - 4y + 1) + (y^2 - 4y + 1)\ ) = 0$

$2y\ (y^2 - 4y + 1)\ (2y + 1) = 0$

$y_1 = 0\ ...\ \text{tg } x/2 = 0\ ...\ x/2 = 0\ ...\ x = 0$

$y_2 = -1/2\ ...\ \text{tg } x/2 = -1/2\ ...\ x = -53°12′$

$y_3 = 2 - \sqrt{3} = 0,268\ ...\ x = 30°$

$y_4 = 2 + \sqrt{3} = 3,732\ ...\ x = 150°$

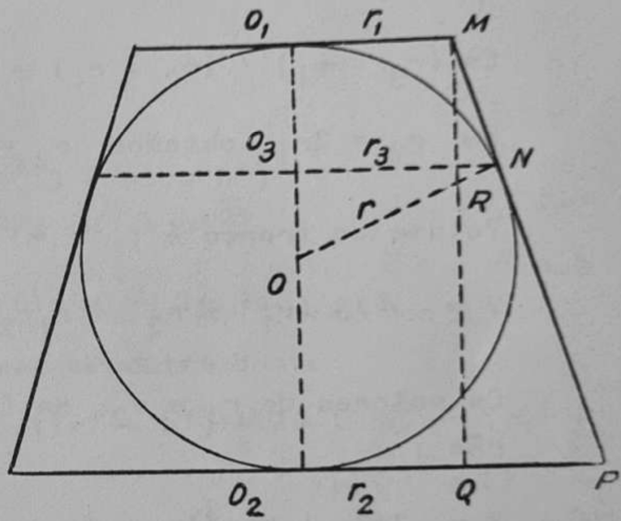
RESPOSTA:

$x = 0°\ ,\ -53°12′\ ,\ 30°\ ,\ 150°$

2ª QUESTÃO - ITEM C

Valor 1,0

ENUNCIADO: Calcule o volume de um tronco de cone circunscrito a uma esfera de raio $\underline{r}$, sabendo que a circunferência de tangência da esfera com a superfície lateral do tronco está em plano cuja distância à base maior do tronco é o dôbro da distância à base menor.



SOLUÇÃO: Seja $\underline{O}$ o centro e $\underline{r}$ o raio da esfera; r_1 e r_2 os raios das bases do tronco do cone; r_3 o raio da circunferência de contato em um ponto N; O_1, O_2 e O_3 os centros das bases e da seção, respectivamente; MP é a geratriz do cone que passa pelo ponto N.

Por serem segmentos de tangentes tiradas de M e P, respectivamente, à circunferência determinada pela interseção da superfície esférica e o plano diametral, que passa pelos pontos não alinhados O, M e P, temos as relações:

$MO_1 = MN$

$PO_2 = PN.$

O teorema de Tales e : $O_1O_3 = O_2O_3/2$; $MN/PN = O_1O_3/O_2O_3$ permitem : $MO_1/PO_2 = 1/2.$

$r_1/r_2 = 1/2$ .... $r_2 = 2r_1$

Os triângulos MNR e MOP são semelhantes :

$MR/MQ = RN/QP$ .... $O_1O_3/O_1O_2 = (r_3 - r_1)/(r_2 - r_1)$

$(r_3 - r_1)/(r_2 - r_1) = 1/3$

Do triângulo O_3N vem :

$O_3N = (ON^2 - OO_3^2)^{1/2}$

Como: $OO_3 = r - O_1O_3 = r - 1/2.(2r) = r/3$, temos:

$r_3 = (r^2 - r^2/9)^{1/2}$

$r_3 = 2.2^{1/2} . r/3$

Em $(r_3 - r_1) / (r_2 - r_1) = 1/3$ iremos obter $r_1 = 2^{1/2} . r/2$

Em $r_2 = 2r_1$ obtemos $r_2 = 2^{1/2}\, r$

Volume do tronco é :

$V = \pi/3\ (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)\ 2r$

Os valores de r_1 e r_2 na fórmula do volume do tronco de cone darão :

$V = 7/3\ (\pi r^3).$

RESPOSTA: $V = 7/3\ (\pi r^3)$

3ª QUESTÃO - ITEM A

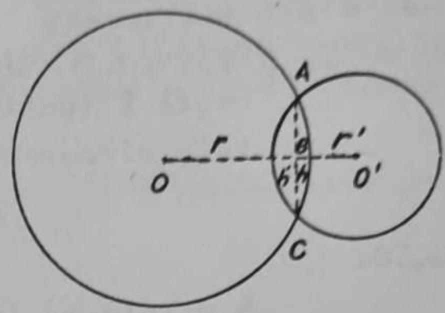
Valor 2,0

ENUNCIADO: Calcule, exatamente, o volume de uma lente esférica biconvexa de espessura 1 metro e superfície π metros quadrados, para $\pi = 3,141$.

SOLUÇÃO:

Sejam dois círculos O e O' de raios r e r', que têm a lente como parte comum.

A lente é a soma de* 2 segmentos esféricos da mesma base. Logo, o volume da lente será :



$$V = \pi h^2/3\ (3r-h) + \pi h'^2/3\ (3r' - h')$$

$$V = \pi(h^2 r + h'^2 r') - \pi/3\ (h^3 + h'^3)$$

$S = 2\pi(rh + r'h')$: Superfície da lente

As cordas que se cortam, fornecem aos produtos :

$h\ (2r - h) = AB\ .\ BC \qquad h'\ (2r' - h') = AB\ .\ BC$

$h\ (2r - h) = h'\ (2r' - h')$

Das relações acima, podemos obter :

$rh + r'h' = S/2\pi\ ;\ hr - h'r' = 1/2\ (h^2 - h'^2)$.

Considerando : espessura da lente = $e = h+h'$, os valores de r e r' obtidos nas duas últimas igualdades, teremos:

$$V = S.\ e/4 - \pi e^3/12$$

RESPOSTA:

$$V = 0{,}5235\ m^3$$

3ª QUESTÃO - ITEM B

Valor 2,0

ENUNCIADO: Calcule o volume do tetraedro regular, sabendo que sua aresta é igual à distância dos centros dos círculos inscrito e circunscrito ao triângulo de lados 4m, 6m e 8m.

SOLUÇÃO:

$$S = (p(p-a)(p-b)(p-c))^{1/2}$$

$$R = abc/4S$$

Face os dados do problema :

$$R = 16.15^{1/2} / 15$$

$$r = S/p \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; r = 15^{1/2} / 3$$

Seja OO' a distância dos centros dos círculos inscrito e circunscrito ao triângulo de lados 4m, 6m e 8m. Temos:

$$OO'^2 = R(R - 2r) = 6,4 \;\ldots\ldots\ldots \; OO' = (6,4)^{1/2}$$

O volume pedido será :

$$V = OO'^3 \cdot 2^{1/2} / 12$$

RESPOSTA:

$$V = 3,2 \times (3,2)^{1/2} / 3 \;\; m^3$$

$$= 1,91$$