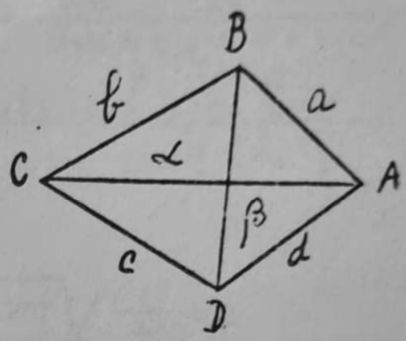
PROVA DE GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1ª QUESTÃO: ITEM 1
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule as diagonais α = AC e β = BD do quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência de raio R.
Dados:

$a = AB = 2m$
$b = BC = 5m$
$c = CD = 6m$
$d = DA = 3m$

SOLUÇÃO:



Teorema de Ptolomeu

$$\alpha\beta = ac + bd$$

e

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

Multiplicando e vidindo uma expressão pela outra, e fazendo as substituições numéricas, temos:

$$\alpha = \frac{9}{7}\sqrt{21}$$

$$\beta = \sqrt{21}$$

RESPOSTA:

$$\frac{9}{7}\sqrt{21}$$

$$\sqrt{21}$$

1ª QUESTÃO: ITEM 2
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule a mediana que parte do vértice comum aos lados de 7 e 3 metros do triângulo ABC, cujo perímetro é de 18 metros.

SOLUÇÃO:

$$a = 2p - (b+c) = 18 - 10 = 8$$

$$b^2 + c^2 = 2\left(m^2 + \frac{a^2}{4}\right) \quad \therefore \quad m = \sqrt{13} \text{ metros}$$

RESPOSTA:

$m = \sqrt{13}$ metros.

1ª QUESTÃO: ITEM 3
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule a bissetriz interna do ângulo A no triângulo ABC de lados a = 6, b = 3 e c = 5 metros.

SOLUÇÃO:

$$S = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

p = 7

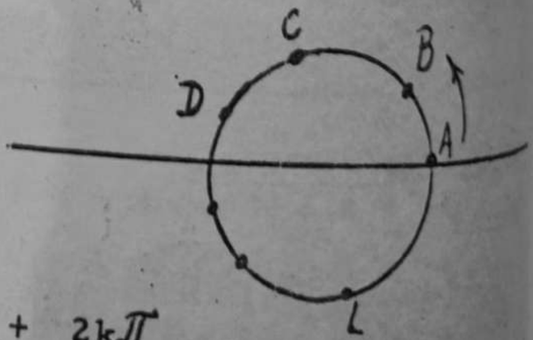
$$\therefore \quad S = \frac{1}{4}\sqrt{105} = 2,56\ m^2$$

RESPOSTA:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{105} = 2,56\ m^2$$

1ª QUESTÃO: ITEM 4
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Escreva a relação geral de Chasles para a soma dos arcos trigonométricos consecutivos da figura:



SOLUÇÃO:

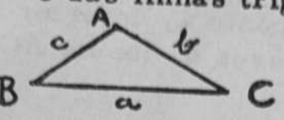
$$\overset{\frown}{AL} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \ldots + \overset{\frown}{KL} + 2k\pi$$

RESPOSTA:

AL = AB+BC + . . . KL + 2kπ

1ª QUESTÃO: ITEM 5
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Dado o triângulo da figura, calcule a em função do semi-perímetro " p " e das linhas trigonométricas dos arcos metade.



SOLUÇÃO:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{2p}{\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C}$$

$$a = \frac{2p \text{ sen } A}{\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C} = \frac{2.\ 2p \text{ sen } \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

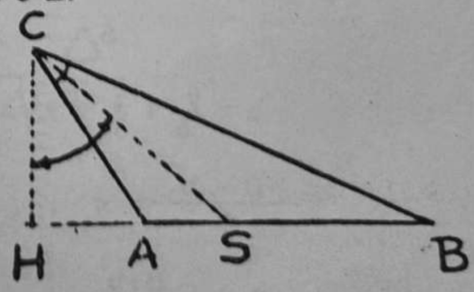
$$a = \frac{p \text{ sen } \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

RESPOSTA:

$$a = \frac{p \text{ sen } \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

2ª QUESTÃO: ITEM 1
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: A bissetriz interna e a altura traçadas a partir do vértice C de um triângulo ABC, formam um ângulo de 47°. Dado C = 34°, calcule os ângulos A e B.



SOLUÇÃO:

$$\hat{C} = 34^\circ \Rightarrow A + B = 146^\circ$$

$$HCS = 47^\circ \Rightarrow A - B = 94^\circ$$

$$A + B = 146^\circ \Rightarrow A = 120^\circ$$

$$A - B = 94^\circ \Rightarrow B = 26^\circ$$

RESPOSTA:

$A = 120^\circ$

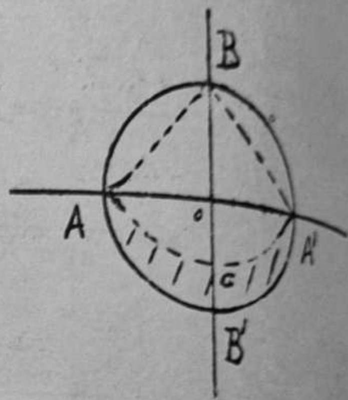
$B = 26^\circ$

2ª QUESTÃO: ITEM 2
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Em um círculo de raio R e centro 0 traçam-se dois diâmetros perpendiculares AA' e BB'.
Com centro em B e raio BA traça-se uma circunferência que determina sôbre BB' o ponto C, interior à circunferência de raio R.
Calcule a área da lúnula ACA'B'A.

SOLUÇÃO: Mostra-se, fàcilmente, que:

$$A_{ACA'B'A} = A_{ABA'} = \frac{R \times 2R}{2} = R^2$$



RESPOSTA: R^2

2ª QUESTÃO: ITEM 3
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule a altura do trapézio equivalente ao triângulo ABC (de lados 4; 5 e 7 metros), sabendo-se que a base menor do trapézio é igual ao lado do hexágono circunscrito ao círculo no triângulo ABC.
O segmento que une os pontos médios das diagonais do trapézio mede $\sqrt{6}$ metros.

SOLUÇÃO:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$S_\triangle = rs = \frac{1}{2}\sqrt{6} \times 8 = 4\sqrt{6}$$

$$b = \ell_6 = \frac{2}{3}\, r\sqrt{3} = \sqrt{2} \qquad b = \sqrt{2}$$

$$\frac{B-b}{2} = x \quad \therefore \quad B = 2x + b = 2\sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$S_t = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot h = 4\sqrt{6} \quad \therefore \quad h = 6 - 2\sqrt{3}$$

ou

$h = 2,54$ m

RESPOSTA:

$h = 2,54$ m

2ª QUESTÃO: ITEM 4
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Duas retas paralelas cortadas por uma terceira formam pares de ângulos suplementares dos quais um é 3/7 do outro. Que relação com o ângulo reto tem cada um dêstes ângulos?

SOLUÇÃO:

$$\alpha + \beta = 2R$$
$$\alpha = (3/7)$$
$$(3/7)\,\beta + \beta = 2R$$
$$(10/7)\,\beta = 2R \qquad \beta = (7/5)R$$
$$\alpha = 2/3 \qquad \beta = \frac{3}{7} \times \frac{7}{5}\,R = \frac{3}{5}\,R$$
$$\alpha = 3/5\ R$$
$$\beta = 7/5\ R$$

RESPOSTA:

$$\alpha = 3/5\ R$$
$$\beta = 7/5\ R$$

2ª QUESTÃO: ITEM 5
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Resolva a equação abaixo para tg x:

$$15\sec^2 x\ \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^3 x\,(\mathrm{tg}^3 x + 20) + \sec^2 x - \mathrm{tg}^2 x +$$
$$+\ 6\,\mathrm{tg}\,x\,(\mathrm{tg}^4 x + 1) = 0$$

SOLUÇÃO:

$$\sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x \qquad \text{e} \qquad \sec^2 x - \mathrm{tg}^2 x = 1$$

Logo, substituindo e operando, resulta:

$$(\mathrm{tg}x + 1)^6 = 0$$
$$\mathrm{tg}\,x = -1$$

RESPOSTA:

$$\mathrm{tg}\,x = -1$$

(6 raízes)

3ª QUESTÃO: ITEM 1
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule a relação entre o raio do círculo ex-inscrito a um triângulo equi látero e o lado dêste polígono.

SOLUÇÃO:

$$\frac{r}{\ell_3} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{60^\circ}{2}\cos\frac{60^\circ}{2}}{\cos\frac{60^\circ}{2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

RESPOSTA:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3ª QUESTÃO: ITEM 2
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Verifique se:

$$\text{arcsen}\sqrt{\frac{1}{1+m}} = \text{arc tg}\sqrt{\frac{1}{m}}$$

SOLUÇÃO:

$$y = \text{arc sen}\sqrt{\frac{1}{1+m}} \subset \text{sen } y = \sqrt{\frac{1}{1+m}} \subset \text{sen}^2 y = \frac{1}{1+m}$$

$$\cos y = \sqrt{\frac{m}{1+m}} \subset \frac{\text{sen } y}{\cos y} = \sqrt{\frac{1}{m}} = \text{tg } y \subset \text{arc tg}\sqrt{\frac{1}{m}} = y$$

RESPOSTA:

Verificado.

3ª QUESTÃO: ITEM 3
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: A interseção de um plano com as arestas de um prisma reto triangular regular determina, a partir da base, segmentos de 3; 4 e x metros sôbre as arestas.

Calcule o valor de x para que os dois volumes resultantes sejam equivalentes. Aresta do prisma: igual a 10 metros.

SOLUÇÃO:

$$S \cdot \frac{3+4+x}{3} = S \cdot \frac{7+6+10-x}{3}$$

$$3 + 4 + x = 7 + 6 + 10 - x$$

$$2x = 16 \quad \therefore \quad x = 8 \text{ metros.}$$

RESPOSTA: 8 metros.

3ª QUESTÃO: ITEM 4

ENUNCIADO: O raio da base de um cone mede 2,5 metros e o volume 30 metros cúbicos. Calcule:

a) a superfície lateral do cone.

b) o ângulo do setor obtido desenvolvendo a superfície lateral dêste cône sôbre um plano.

SOLUÇÃO:

$$\frac{\pi r^2 h}{3} = 30 \quad \therefore \quad h = \frac{90}{\pi r^2} = 4,58$$

$$\ell = \sqrt{h^2 + r^2} = 5,217 \text{ m}$$

A superfície lateral é $S\ell = \pi r \ell = 40,919$

O ângulo do setor é: $\theta = 360 \frac{r}{\ell} = 172^\circ\ 30'$

RESPOSTA: $172^\circ\ 30'$

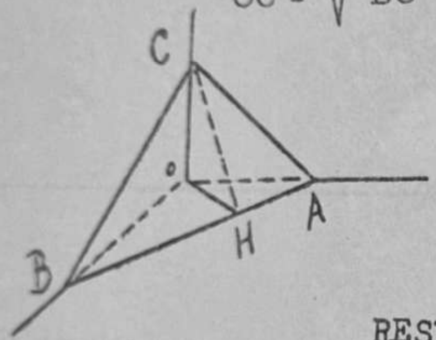
3ª QUESTÃO: ITEM 9
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Determine o comprimento das arestas da pirâmide formada pela interseção de um plano com tôdas as arestas de um triedro tri-retângulo, de modo que a seção seja um triângulo de lados 5; 5 e 6 metros.

SOLUÇÃO: $\overline{CH}$ a altura do ABC $\qquad \overline{OH}$ altura do AOB

Fazendo $\overline{AB} = 6, \quad \overline{OH} = 3$ e $\overline{OB} = 3\sqrt{2} = \overline{OA}$

$$\overline{OC} = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{25-18} = \sqrt{7}$$



RESPOSTA: $3\sqrt{2}$; $\quad 3\sqrt{2}$ e $\sqrt{7}$ metros.

4ª QUESTÃO: ITEM 1
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule a área da seção máxima obtida pelo corte de um tetraedro regular, de aresta 6 metros por um plano paralelo às duas arestas opostas.

SOLUÇÃO:

$\ell = 6$

$a = x \qquad b = \ell - x$

$\text{Área} = A = ab = x(\ell - x) = x\ell - x^2$

$\dfrac{dA}{dx} = 0 \qquad \ell - 2x = 0 \quad \therefore \quad x = \ell/2$

$= \ell/2 \qquad b = \dfrac{\ell}{2}$

RESPOSTA:

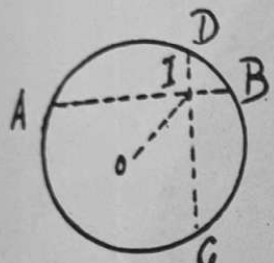
$$A = \frac{\ell^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$A = 9\ m^2$

4ª QUESTÃO: ITEM 2
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule a distância do centro do círculo de raio R=4 metros ao ponto de interseção de duas cordas perpendiculares que medem, respectivamente, 6 e 7 metros.

SOLUÇÃO:



Demonstra-se que

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 8\,\overline{OD}^2 - 4\,\overline{OI}^2$$

$$6^2 + 7^2 = 8 \times (4)^2 - 4\,\overline{OI}^2$$

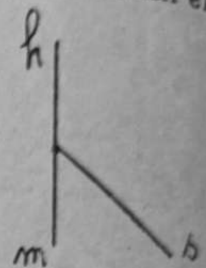
$$\therefore\quad \overline{OI} = d = \frac{\sqrt{43}}{2}$$

RESPOSTA: $d = \dfrac{\sqrt{43}}{2}$ metros.

4ª QUESTÃO: ITEM 3
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Um relógio possui três ponteiros que giram ao redor de um centro comum, o das horas, o dos minutos e o dos segundos.

A que horas, pela primeira vez depois das doze horas, o ponteiro dos segundos fica situado entre o das horas e o dos minutos formando com êles ângulos adjacentes suplementares.



SOLUÇÃO: $\widehat{hs}$ e $\widehat{Sm}$ são adjacentes e suplementares quando h e m são semi retas opostas.

Quando isso ocorre

h andou $\hat{\alpha}$

m " $12\hat{\alpha}$ $\therefore$ $12\hat{\alpha} = \hat{\alpha} + \widehat{2R}$ $\therefore$ $\hat{\alpha} = \dfrac{\widehat{2R}}{11}$

$\bar{v}_m = 12\,\bar{v}_h$

Como h leva 6 horas para percorrer $\widehat{2R}$ temos

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{2R}}{11} = \frac{6h}{11} = 32 \text{ min } 43 \text{ seg } \frac{7}{11}$$

RESPOSTA:

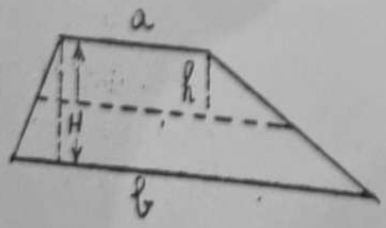
12h 32min 43 seg $\frac{7}{11}$

4ª QUESTÃO: ITEM 4
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Um triângulo de área 2 metros quadrados tem por base a base média de um trapézio e por altura a distância dessa base média a uma das bases do trapézio.

Calcule a área do trapézio.

SOLUÇÃO:



$S_{T_z} = \dfrac{a+b}{2} H$

$H = 2h$ $\qquad S_{\triangle} = \dfrac{a+b}{8} H$

$S_{\triangle} = \dfrac{a+b}{2}\, h/2$

logo $S_{T_z} = 4\, S_{\triangle} = 4 \times 2\pi = 8\pi \text{ m}^2$

RESPOSTA:

$8\pi \text{ m}^2$

4ª QUESTÃO: ITEM 5
(Valor 0, 4)

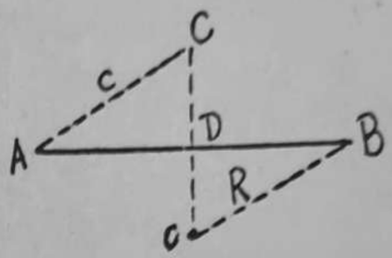
ENUNCIADO: Calcule a área da calota esférica cuja corda do arco gerador mede 2 metros.

SOLUÇÃO:

$$\overline{AC}^2 = c^2 = 2Rh$$

$$\therefore \quad S_C = \pi c^2 = 4\pi$$

$$2\pi Rh = \pi c^2 = 4\pi$$



RESPOSTA:

$$S_c = 4\pi \ m^2$$

5ª QUESTÃO: ITEM 1
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Resolva a equação:

$$2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$$

SOLUÇÃO:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x \Rightarrow 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 4 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \ ; \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

(dupla)

RESPOSTA:

$$x = 4k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

5ª QUESTÃO: ITEM 2
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Prove a identidade:

$$\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

SOLUÇÃO:

$$(\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a)(\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 a \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cos^2 a =$$

$$= \operatorname{sen}^2 a(1-\operatorname{sen}^2 b) - \operatorname{sen}^2 b\,(1-\operatorname{sen}^2 a) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

RESPOSTA:

Provado.

5ª QUESTÃO: ITEM 3
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Um prisma reto, de base hexagonal regular, tem 4, 5 centímetros cúbicos de volume e 12 centímetros quadrados de superfície lateral. Calcule o lado do hexágono e a altura do prisma.

SOLUÇÃO:

$$\frac{3a^3\sqrt{3}}{2} \times h = 4,5$$

$$6a \times h = 12$$

$$a = 0,866 \text{ cm}$$

h: altura do prisma

a: lado do hexágono

$h = 2,31$ cm

RESPOSTA:

$a = 0,866$ cm
$h = 2,31$ cm

5ª QUESTÃO: ITEM 4
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule a área de um triângulo obliquângulo, de medianas $m_A = 9\text{cm}$, $m_B = 6\text{cm}$, $m_C = 5\text{cm}$.

SOLUÇÃO:

m_A, m_B, m_C : medianas

$$k = \frac{m_A + m_B + m_C}{2} = \frac{9 + 6 + 5}{2} = 10$$

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{k(k-m_A)(k-m_B)(k-m_C)}$$

$$S = \frac{4}{3} \quad 200\ \text{cm}^2$$

RESPOSTA: $S = \dfrac{4}{3}\sqrt{200\ \text{cm}^2}$

5ª QUESTÃO: ITEM 5
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule o ângulo <u>a</u> da cunha de 1 metro cúbico que pertence à esfera de volume 4, 8 metros cúbicos.

SOLUÇÃO:

$$\frac{x}{360^o} = \frac{1}{4,8} \qquad x = 75^o$$

RESPOSTA:

$x = 75^o$