

IME – 1969/1970 –  
 GEOMETRIA/TRIGONOMETRIA  
 (O Globo, 10/12/1969, pág. 23)

1ª Questão – Item 1 – Valor: 0,4

Enunciado: Calcule as diagonais alfa – AC e beta – BD do quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência de raio r.

Dados: a – AB – 2 m  
 b – AC – 5 m  
 c – CD – 6 m  
 d – DA – 3 m

RESPOSTA:

$$\beta = \sqrt{21} \quad \alpha = \frac{9}{7} \sqrt{21}$$

1ª Questão – Item 2 – Valor: 0,4

Enunciado: Calcule a mediana que parte do vértice comum aos lados de 7 e 3 metros do triângulo ABC, cujo perímetro é de 18 metros.

RESPOSTA:

$$m_a = \sqrt{13}$$

1ª Questão – Item 3 – Valor: 0,4

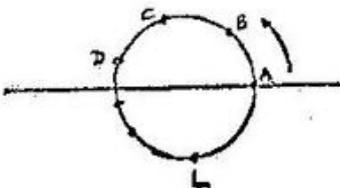
Enunciado: Calcule a bissetriz interna do ângulo A no triângulo ABC de lados a – 6, b – 3 e c – 5 metros.

RESPOSTA:

$$\beta_a = \frac{1}{4} \sqrt{105}$$

1ª Questão – Item 4 – Valor: 0,4

Enunciado: Escreva a relação geral de Chasles para a soma dos arcos trigonométricos consecutivos da figura:

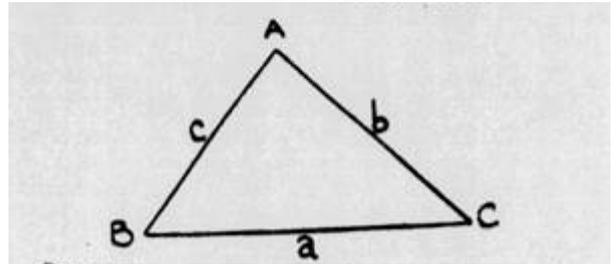


SOLUÇÃO:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \dots + \widehat{LA} = 2\pi$$

1ª Questão – Item 5 – Valor: 0,4

Enunciado: Dado o triângulo da figura, calcule a em função do semiperímetro "p" e das linhas trigonométricas dos arcos metade.



RESPOSTA:

$$r = \frac{p \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

2ª Questão – Item 1 – Valor: 0,4

Enunciado: A bissetriz interna e a altura, traçadas a partir do vértice C de um triângulo ABC, formam um ângulo de 47°. Dado C – 34°, calcule os ângulos A e B.

RESPOSTA:

$$A = 120^\circ \quad B = 26^\circ$$

2ª Questão – Item 2 – Valor: 0,4

Enunciado: Em um círculo de raio R e centro O traçam-se dois diâmetros perpendiculares AA' e BB'.

Com centro em B e raio BA traça-se uma circunferência que determina sobre BB' o ponto C, interior à circunferência de raio R.

Calcule a área da lúnula ACA'B'A.

RESPOSTA:

$$S_{ACA'B'A} = R^2$$

2ª Questão – Item 3 – Valor: 0,4

Enunciado: Calcule a altura do trapézio equivalente ao triângulo ABC (de 1.ª dos 4; 5 e 7 metros), sabendo-se que a base menor do trapézio é igual ao lado do hexágono circunscrito ao círculo inscrito no triângulo ABC.

O segmento que une os pontos médios das diagonais do trapézio mede raiz quadrada de 6 metros.

RESPOSTA:

$$h = 6 - 2\sqrt{3}$$

2ª Questão – Item 4 – Valor: 0,4

Enunciado: Duas retas paralelas cortadas por uma terceira formam pares de ângulos suplementares dos quais um é 3/7 do outro. Que relação com o ângulo reto tem cada um desses ângulos?

RESPOSTA:

$$\alpha = \frac{105}{2}^\circ$$
$$\beta = \frac{75}{2}^\circ$$

2ª Questão – Item 5 – Valor: 0,4

ENUNCIADO: Resolva a equação abaixo para  $\text{tg } x$ :

$$15 \sec^2 x \text{tg}^2 x + \text{tg}^3 x (\text{tg}^3 x + 20) + \sec^2 x - \text{tg}^2 x + 6 \text{tg} x (\text{tg}^4 x + 1) = 0$$

RESPOSTA:

$$\text{tg } x = -1$$

3ª Questão – Item 1 – Valor: 0,4

Enunciado: Calcule a relação entre o raio do círculo ex-inscrito a um triângulo equilátero e o lado deste polígono.

RESPOSTA:

$$r = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

3ª Questão – Item 2 – Valor: 0,4

ENUNCIADO: Verifique se:

$$\arcsen \sqrt{\frac{1}{1+m}} = \text{arc } \text{tg} \sqrt{\frac{1}{m}}$$

SOLUÇÃO:  $\text{arc } \text{tg} \sqrt{\frac{1}{1+m}} = \text{arc } \cos \sqrt{\frac{m}{1+m}}$   
 $= \text{arc } \sin \sqrt{\frac{1+m}{m}} = \text{arc } \text{tg} \sqrt{\frac{1}{m}}$   
... C.Q.D.

3ª Questão – Item 3 – Valor: 0,4

Enunciado: A interseção de um plano com as arestas de um prisma reto triangular regular determina, a partir da base, segmentos de 3; 4 e  $x$  metros sobre as arestas. Calcule o valor de  $x$  para que os dois volumes resultantes sejam equivalentes. Aresta do prisma: igual a 10 metros.

RESPOSTA:

$$x = 8 \text{ m}$$

3ª Questão – Item 4 – Valor: 0,4

Enunciado: O raio da base de um cone mede 2,5 metros e o volume 30 metros cúbicos. Calcule:

- a) a superfície lateral do cone
- b) o ângulo do setor oblíquo desenvolvendo a superfície lateral deste cone sobre um plano.

RESPOSTA:

$$Sl \approx 40,97 \text{ m}^2$$
$$\alpha \approx 172,4^\circ$$

3ª Questão – Item 5 – Valor: 0,4

Enunciado: Determine o comprimento das arestas da pirâmide formada pela interseção de um plano com todas as arestas de um triedro tri-retângulo, de modo que a seção seja um triângulo de lados 5; 5 e 6 metros.

RESPOSTA:

$$x = \sqrt{7} \text{ m}$$
$$y = z = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

4ª Questão – Item 1 – Valor: 0,4

Enunciado: Calcule a área da seção máxima obtida pelo corte de um tetraedro regular, de aresta 6 metros, por um plano paralelo às duas arestas opostas.

RESPOSTA:

$$S = 9 \text{ m}^2$$

4ª Questão – Item 2 – Valor: 0,4

Enunciado: Calcule a distância do centro do círculo de raio  $R = 4$  metros ao ponto de interseção de duas cordas perpendiculares que medem, respectivamente, 6 e 7 metros.

RESPOSTA:

$$d = 3,28 \text{ m}$$

4ª Questão – Item 3 – Valor: 0,4

Enunciado: Um relógio possui três ponteiros que giram ao redor de um centro comum, o das horas, o dos minutos e o dos segundos.

A que horas, pela primeira vez depois das doze horas, o ponteiro dos segundos fica situado entre o das horas e o dos minutos, formando com eles ângulos adjacentes suplementares.

RESPOSTA:

$$12 \text{ hr } 32 \text{ min } 43 \frac{7}{11} \text{ seg}$$

4ª Questão – Item 4 – Valor: 0,4

Enunciado: Um triângulo de área  $2 \text{ m}^2$  metros quadrados tem, por base,  $r$  base média de um trapézio e, por altura, a distância dessa base média a uma das bases do trapézio.

Calcule a área do trapézio.

RESPOSTA:

$$S_{\text{trapézio}} = 8 \text{ m}^2$$

4ª Questão – Item 5 – Valor: 0,4

Enunciado: Calcule a área da calota esférica cuja corda do arco gerador mede 2 metros.

RESPOSTA:

$$S = 4\pi \text{ m}^2$$

5ª Questão – Item 1 – Valor: 0,4

ENUNCIADO: Resolva a equação:

$$2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$$

RESPOSTA:

$$x = 4k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

5ª Questão – Item 2 – Valor: 0,4

ENUNCIADO: Prove a identidade:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

SOLUÇÃO:

$$(\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$

$$= \sin^2 a \cos^2 b - \sin a \cos b \cos a \sin b + \cos a \sin b \sin a \cos b - \cos^2 a \sin^2 b$$

$$= \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a)$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 b$$

C.Q.D.

5ª Questão – Item 3 – Valor: 0,4

Enunciado: Um prisma reto, de base hexagonal regular, tem 4,5 centímetros cúbicos de volume e 12 centímetros quadrados de superfície lateral. Calcule o lado do hexágono e a altura do prisma.

RESPOSTA:

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \quad h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

**5ª Questão – Item 4 – Valor: 0,4**

**ENUNCIADO:** Calcule a área de um triângulo obliquângulo, de mediana  $m_A = 9\text{cm}$ ,  $m_B = 6\text{cm}$ ,  $m_C = 5\text{cm}$ .

**RESPOSTA:**

$$S_{\triangle ABC} = \frac{40\sqrt{2}}{3}$$

**5ª Questão – Item 5 – Valor: 0,4**

**Enunciado:** Calcule o ângulo  $\alpha$  da cunha de 1 metro cúbico, que pertence à esfera de volume 4,8 metros cúbicos.

**RESPOSTA:**

$$\alpha = 75^\circ$$

IME – 1969/1970 – GEOMETRIA/TRIGONOMETRIA  
(JS, 10/12/1969, pág. 11)

Primeira questão — Item 1 (valor: 0,4) — Calcule as diagonais "Alfa" igual AC e "Beta" igual BD do quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência de raio R.

Dados:

- a igual AB igual 2m
- b igual BC igual 5m
- c igual CD igual 6m
- d igual DA igual 3m.

Resposta

$$\frac{9\sqrt{21}}{7} \text{ m} \quad \text{e} \quad \sqrt{21} \text{ m}$$

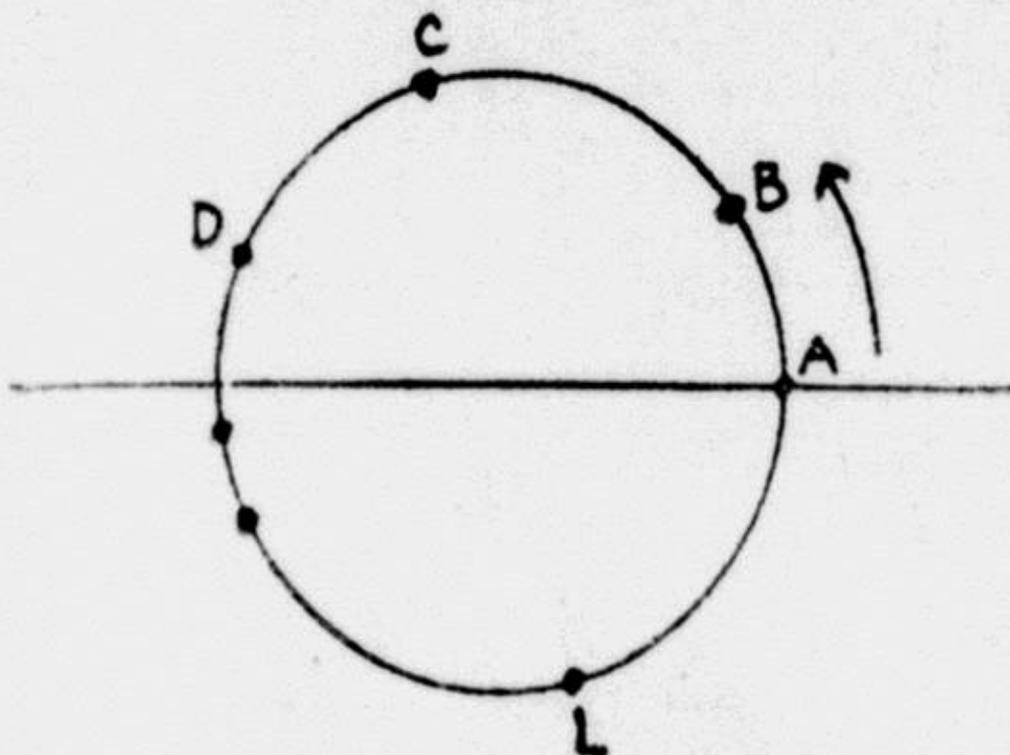
Primeira questão — Item 2 (valor: 0,4) — Calcule a mediana que parte do vértice comum aos lados de 7 e 3 metros do triângulo ABC, cujo perímetro é de 13 metros.

Resposta: Raiz quadrada de 13m.

Primeira questão — Item 3 (valor: 0,4) — Calcule a bissetriz interna do ângulo A no triângulo ABC de lados a igual 6 — b igual 3 — e c igual 5 metros.

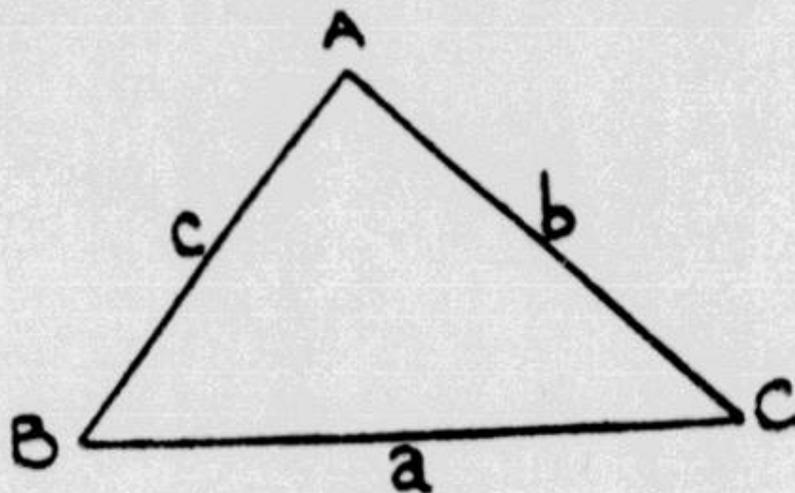
Resposta:  $\frac{1}{4}$  (raiz de 105m).

Primeira questão — Item 4 (valor: 0,4) — Escreva a relação geral de Chasles para a soma dos arcos trigonométricos consecutivos da figura:



Resposta:  $AB + BC + CD + \dots + KL + LA = 0$

Primeira questão — Item 5 (valor: 0,4) — Dado o triângulo da figura, calcule  $a$  em função do semiperímetro "p" das linhas trigonométricas dos arcos metade.



Resposta) —

$$\frac{\frac{p \operatorname{sen} a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}$$

2.<sup>a</sup> questão — Item 1 (valor: 0,4) — A bissetriz interna e a altura, traçadas a partir do vértice C de um triângulo ABC, formam um ângulo de  $47^\circ$ .

Dado  $C = 34^\circ$ , calcule os ângulos A e B

Resposta)  $26^\circ$  e  $120^\circ$ .

2.<sup>a</sup> questão — Item 2 (valor: 0,4) — Em círculo de raio R e centro O traçam-se dois diâmetros perpendiculares AA' e BB'.

Com centro em B e raio BA traça-se uma circunferência que determina BB' o ponto C, interior à circunferência de raio R.

Calcule a área da lúnula ACA'B'A.

Resposta)  $S = r$  ao quadrado.

2.<sup>a</sup> questão — Item 3 (valor: 0,4) — Calcule a altura do trapézio equivalente ao triângulo ABC (de lados 4, 5 e 7 metros), sabendo-se que a base menor do trapézio é igual ao lado do hexágono circunscrito ao círculo inscrito no triângulo ABC.

O segmento que une os pontos médios das diagonais do trapézio mede raiz quadrada de 6 metros.

Resposta)  $h = 2$  (3 — raiz quadrada de 3m).

2.<sup>a</sup> questão — Item 4 (valor: 0,4) Duas retas paralelas cortadas por uma terceira formam pares de ângulos suplementares dos quais um é  $3/7$  do outro. Que relação com o ângulo reto tem cada um destes ângulos?

Resposta) "Alfa" =  $3/5$  r

"Beta" =  $7/5$  r

2.<sup>a</sup> questão — Item 5 (valor: 0,4) — Resolva a equação abaixo para tg x:

$$15 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x (\operatorname{tg}^3 x + 20) + \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^4 x + 1) = 0$$

Resposta)  $x = K \pi + (3 \pi)/4$

$\operatorname{tg} x = -1$

3.ª questão — Item 1 (valor: 0,4) — Calcule a relação entre o raio do círculo ex-inscrito a um triângulo equilátero e o lado deste polígono.

Resposta: (éle vêzes raiz quadrada de 3)/2.

3.ª questão — Item 2 (valor: 0,4) — Verifique se

$$\arcsen \sqrt{\frac{1}{1+m}} = \text{arc tg} \sqrt{\frac{1}{m}}$$

Resposta) Pelo desenvolvimento realizado, verificamos que a igualdade se verifica.

3.ª questão — Item 3 (valor: 0,4) — A interseção de um plano com as arestas de um prisma reto triangular regular determina, a partir da base, segmentos de 3, 4 e  $x$  metros sobre as arestas. Calcule o valor de  $x$  para que os dois volumes resultantes sejam equivalentes. Aresta do prisma: igual a 10 metros.

Resposta)  $x = 8m$

3.ª questão — Item 4 (valor: 0,4) — O raio da base de um cone mede 2,5 metros e o volume 30 metros cúbicos. Calcule:

- a) a superfície lateral do cone.
- b) o ângulo do setor obtido desenvolvendo a superfície lateral deste cone sobre um plano.

Resposta)  $S \text{ indice } e = \text{Pi } r \ g = \text{Pi. } 5/2 \ g$   
 $\text{Alfa} + r/g. 360^\circ = 5/g. 180^\circ$

3.ª questão — Item 5 (valor: 0,4) — Determine o comprimento das arestas da pirâmide formada pela interseção de um plano com tôdas as arestas de um triedro tri-retângulo, de modo que a seção seja um triângulo de lados 5, 5 e 6 metros.

Resposta)  $x = 3$  (raiz quadrada de 2) m  
 $y =$  raiz quadrada de 7m

4.<sup>a</sup> questão — Item 1 (valor: 0,4) — Calcule a área da seção máxima obtida pelo corte de um tetraedro regular, de arestas 6 metros, por um plano paralelo às duas arestas opostas.

Resposta: S max igual a 9 m quadrados.

4.<sup>a</sup> questão — Item 2 (valor: 0,4) — Calcule a distância do Centro de círculo de raio R igual a 4 metros ao ponto de interseção de duas cordas perpendiculares que medem, respectivamente, 6 e 7 metros.

Resposta) p igual a raiz quadrada de  $(43/2)$ .

4.<sup>a</sup> questão — Item 3 (valor: 0,4) — Um relógio possui três ponteiros que giram ao redor de um centro comum, o das horas, o dos minutos e o dos segundos.

A que horas, pela primeira vez depois das doze horas, o ponteiro dos segundos fica situado entre os das horas e o dos minutos, formando com eles ângulos adjacentes suplementares.

Resposta) 30 min  $5'' \frac{5}{11}$

4.<sup>a</sup> questão — Item 4 (valor: 0,4) — Um triângulo de área  $2\pi$  metros quadrados tem por base a base média de um trapézio e, por altura, a distância dessa base média a uma das bases do trapézio.

Calcule a área do trapézio.

Resposta: S trapézio igual a  $8\pi$  m quadrados.

4.<sup>a</sup> questão — Item 5 (valor: 0,4) — Calcule a área da calota esférica cuja corda do arco gerador mede 2 metros.

S igual a  $4\pi$  m quadrados

Quinta questão — Item 1 (valor: 0,4) — Resolva a equação:

$$2 \cos x \text{ mais } 3 \text{ igual a } 4 \cos (x/2).$$

Resposta:  $x = 4K \pi$  mais ou menos  $2\pi/3$

Quinta questão — Item 2 (valor: 0,4) — Prove a identidade:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$

Resposta: Pelo desenvolvimento efetuado, vê-se que a identidade se verifica.

Quinta questão — Item 3 (valor: 0,4) — Um prisma reto, de base hexagonal regular, tem 4,5 centímetros cúbicos de volume e 12 centímetros quadrados de superfície lateral. Calcule o lado do hexágono e a altura do prisma.

Resposta:

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

$$h = 4 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Quinta questão — Item 4 (valor: 0,4) — Calcule a área de um triângulo obliquângulo, de medianas  $m$  índice A igual 9cm,  $m$  índice B igual 6cm,  $m$  índice C igual 5cm.

Resposta:  $40/3$  (raiz quadrada de 2) cms, quadrados.

Quinta questão — Item 5 (valor: 0,4) — Calcule o ângulo  $\alpha$  da cunha de 1 metro cúbico, que pertence à esfera de volume 4,8 metros cúbicos.

Resposta:  $A = 75^\circ$