IME – 1971/1972 – GEOMETRIA/TRIGONOMETRIA
(O Globo, 21/12/1971, pág. 23)

1ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Determinar os valores do arco $\underline{x}$ que satisfazem a equação:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\,(\sec x - \cos x)$$

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{3}\,\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

logo $\operatorname{sen} x = 0$ é solução $\Rightarrow$ $\boxed{x = K\pi\ ;\ K \in \mathbb{Z}}$

a equação fica:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{x = K\pi + \frac{\pi}{6}\ ;\ K \in \mathbb{Z}}$$

resposta: $\boxed{x = K\pi \quad \text{ou} \quad x = K\pi + \frac{\pi}{6}\ ;\ K \in \mathbb{Z}}$

2ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Calcular o lado $\underline{c}$ dos triângulos que tenham:

$\underline{a} = 4\text{cm}$

$\underline{b} = 4(1 + \sqrt{3})\text{cm}$

$\hat{A} = 15^\circ$

$$b \operatorname{sen}\hat{A} = 4(1+\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 2\sqrt{2}$$

como $b \operatorname{sen} A < a < b$ o problema admite duas soluções.

calculo de $\underline{c}$

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b \operatorname{sen}\hat{A}}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{array}{c}\hat{B} = 45^\circ \\ \text{ou} \\ \hat{B} = 135^\circ\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\hat{C} = 120^\circ \\ \text{ou} \\ \hat{C} = 30^\circ\end{array}$$

para $\hat{C} = 120^\circ$

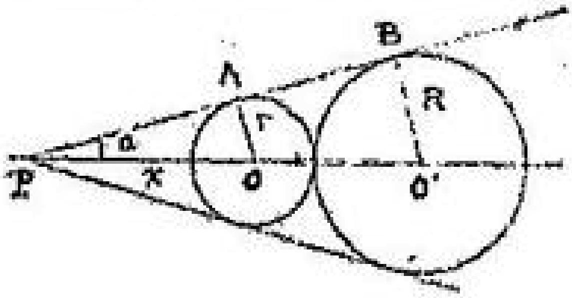
$$c = \frac{a \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow c = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{6}\,(1+\sqrt{3})\ \text{cm.}}$$

para $\hat{C} = 30^\circ$

$$c = \frac{a \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} \Rightarrow c = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow \boxed{c = 2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\ \text{cm.}}$$

3ª QUESTÃO ITEM ÚNICO(0,5pontos)	ENUNCIADO: Dois círculos tangentes entre si têm

raios R e r, sendo $R > r$. As tangentes exteriores comuns a êsses dois círculos formam um ângulo $2a$.
Exprimir R em função de r e da tangente de $a/2$.



$\Delta POA \qquad r = x.\operatorname{sen} a$

$\Delta PO'B \qquad R = (x + R + r)\operatorname{sen} a$

logo: $R = \dfrac{r(1+\operatorname{sen} a)}{(1-\operatorname{sen} a)}$

como: $\operatorname{sen} a = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}$

temos: $\boxed{R = r\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a}{2}}\right)^2}$

4ª QUESTÃO ITEM ÚNICO(0,5 pontos)	ENUNCIADO: Demonstrar que um triângulo ABC, no

qual os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação

$$\frac{\operatorname{Sen}^2 B}{\operatorname{Sen}^2 C} = \frac{\operatorname{Tan} B}{\operatorname{Tan} C}$$

é retângulo ou isósceles.

a relação se escreve:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\hat{B}}{\operatorname{sen}^2\hat{C}} = \frac{\operatorname{sen}\hat{B}.\cos\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{C}.\cos\hat{B}} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B}.\cos\hat{B} = \operatorname{sen}\hat{C}.\cos\hat{C}.$$

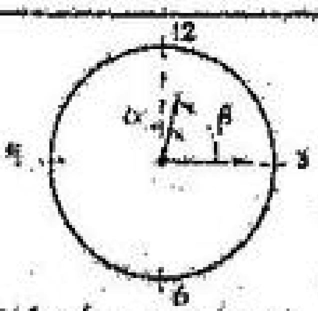
$$\Rightarrow \operatorname{Sen} 2B = \operatorname{sen} 2C \Rightarrow \left|\begin{array}{c} 2\hat{B} = 2\hat{C} \\ \text{ou} \\ 2\hat{B} + 2\hat{C} = 180° \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{C} \quad \ldots (1) \\ \text{ou} \\ \hat{B} + \hat{C} = 90° \ldots (2) \end{array}\right.$$

de (1) o triângulo é isósceles
de (2) o triângulo é retângulo

c.q.d.

5ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (0,5 pontos)	ENUNCIADO:

Determinar o seno e o coseno do ângulo, menor que 180°, formado pelos ponteiros de um relógio que marca 12 horas e 15 minutos.



$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot 30° = 7°30'$$

$$\beta = 90° - 7°30' = 82°30'$$

$$\text{sen}\, 82°30' = \cos 7°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 15°}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\cos 82°30' = \text{sen}\, 7°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 15°}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

logo: resposta:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{sen}\, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ \hline \cos \beta = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \end{array}}$$

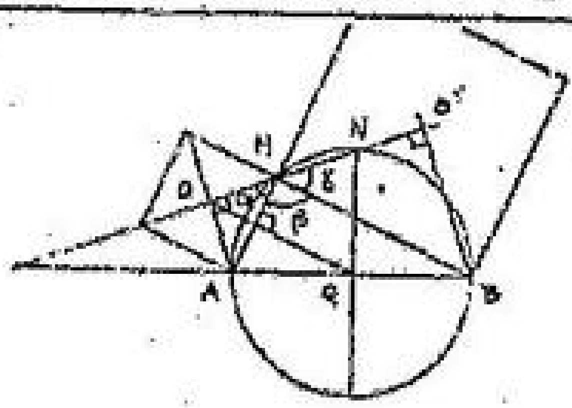
4ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (0,5 pontos)	ENUNCIADO:

Considere-se um ponto móvel M, sôbre uma semicircunferência de diâmetro AB. Sôbre os lados MA e MB do triângulo MAB e exteriormente a êste, constroem-se os quadrados de centros Q e Q'. Supondo-se que M percorre a semicircunferência, pede-se:

a) Mostrar que M, Q e Q' permanecem sôbre uma reta e que esta passa por um ponto fixo.

b) Determinar os lugares geométricos de Q e Q'

a)



$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 45^\circ \\ \beta = 90^\circ \\ \gamma = 45^\circ\end{array}\right| \Rightarrow O\hat{M}O' = 180^\circ \Rightarrow O, M \text{ e } O' \text{ estão alinhados,}$$

$\underline{N}$, médio do arco $\widehat{AB}$ é o ponto fixo.

<u>prova</u>: a diagonal do quadrado é bissetriz do seu ângulo reto, portanto MO' é bissetriz externa do ângulo M – triângulo $A\hat{M}B$. <u>cqd</u>

b) $A\hat{O}Q = 45^\circ \Rightarrow$ o L.G. de O é um arco capaz de 45° sb $\overline{AQ}$

$Q\hat{O}'B = 45^\circ \Rightarrow$ o L.G. de O' é um arco capaz de 45° sb $\overline{BQ}$

ou, então:

$$\left.\begin{array}{l}N\hat{O}'B = 90^\circ \\ N\hat{O}A = 90^\circ \\ N, A \text{ e } B \text{ fixos}\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\text{o L.G. de O é um arco capaz de } 90^\circ \text{ sb } \overline{NA} \\ \text{o L.G. de O' é um arco capaz de } 90^\circ \text{ sb } \overline{NB}\end{array}$$

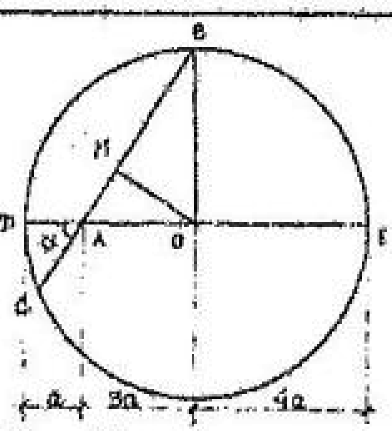
7ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 ponto)	ENUNCIADO:

Seja um círculo de centro $\underline{O}$ e raio $\underline{R}$ igual a $\underline{4a}$. Por um ponto $\underline{A}$ sôbre um diâmetro $\underline{DE}$, tal que $\underline{OA}$ igual a $\underline{3a}$, traça-se uma corda $\underline{BAC}$ fazendo com $\underline{OA}$ um ângulo de 60° ($O\hat{A}B = 60^\circ$)

Pede-se:

a) Calcular os segmentos $\underline{AB}$ e $\underline{AC}$ (AB > AC).

b) Calcular o percurso total descrito pelo ponto $\underline{M}$, médio da corda $\underline{AC}$, quando esta dá um giro de 360° em tôrno de $\underline{A}$.



a) $\overline{AB}.\overline{AC} = 7a \cdot a$ (potência)

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OA} = 3a \\ M\hat{A}O = 60^\circ\end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\overline{OM} = 3a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{AM} = \dfrac{3a}{2}\end{array}\right.$$

ΔOMB retângulo em M

logo: $\overline{MB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OM}^2$

$\overline{MB}^2 = (4a)^2 - \left(\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\overline{MB} = a\dfrac{\sqrt{37}}{2}$.

logo: $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} \Rightarrow \boxed{\overline{AB} = (\sqrt{37} + 3)\dfrac{a}{2}}$

$\overline{AC} = \overline{MB} - \overline{AM} \Rightarrow \boxed{\overline{AC} = (\sqrt{37} - 3)\dfrac{a}{2}}$

b) para qualquer ângulo α, $O\hat{M}A$ é retângulo, logo, M descreve um círculo de raio $\dfrac{3a}{2}$ (duas vêzes)

percurso $= 2 \cdot 2\pi \times \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \boxed{\text{percurso} = 6\pi a.}$

8ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 pontos)	ENUNCIADO:

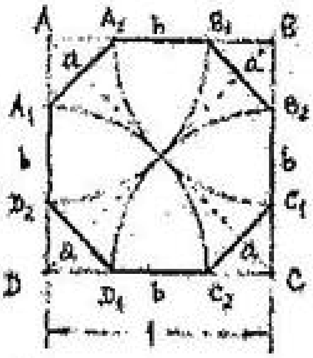
Um quadrado ABCD tem lado unitário e centro O. Sejam (A), (B), (C) e (D) as circunferências com centro em cada vértice e que passa por O.

Pede-se :

a) Identificar o polígono (P) cujos vértices são determinados por (A), (B), (C) e (D) sôbre os lados do quadrado, calculando os seus lados e seus ângulos internos.

b) Identificar o polígono (P') cujos vértices são determinados por (A), (B), (C) e (D) sôbre os prolongamentos dos lados do quadrado, calculando os seus lados e os seus ângulos internos.

c) Demonstrar que (P) e (P') são homotéticos e calcular as possíveis razões de homotetia.



o raio de cada círculo será: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) temos então que:

① $b = BA_2 - BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$

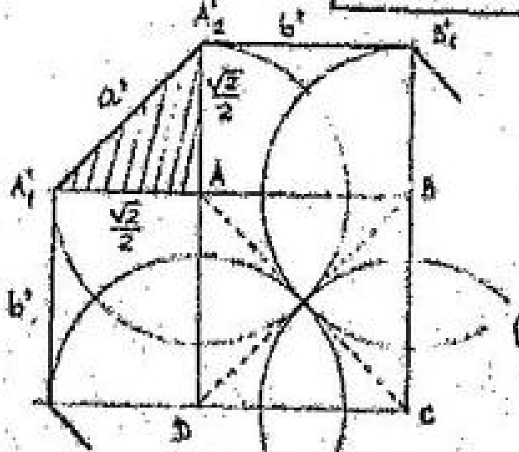
$\Rightarrow b = \sqrt{2} - 1$

② $b + 2a\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1$

③ todos os ângulos internos serão de 135° por ser:

$AA_1 = AA_2 = BB_1 = \dots = DD_2$

temos então que: $\boxed{\text{(P) é um octógono regular.}}$



b)

① $b' = AB \Rightarrow b' = 1$

② no triângulo $AA'_1A'_2$:

$a'^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow a' = 1$

③ todos os ângulos internos serão de 135° por ser:

$AA'_1 = AA'_2 = BB'_1 = \dots = DD'_2$

temos então que: $\boxed{\text{(P') é um octógono regular.}}$

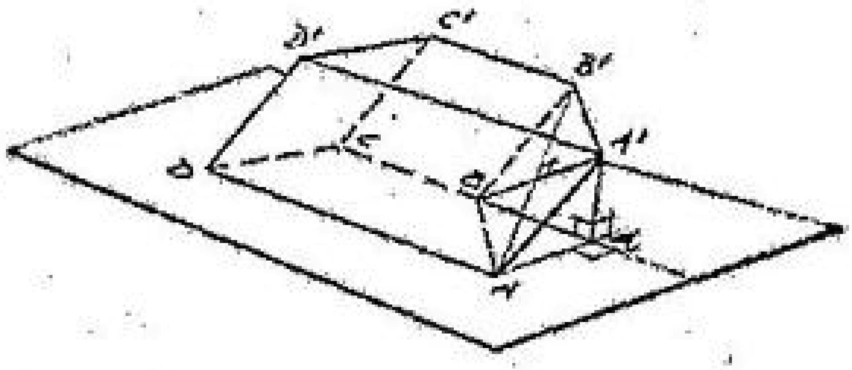
c) (P) e (P') são dois polígonos semelhantes e têm os lados homólogos paralelos, logo são homotéticos; a razão de homotetia será igual à razão dos lados.

$\boxed{K = \sqrt{2} - 1}$ ou $K' = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow \boxed{K' = \sqrt{2} + 1.}$

3ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 pontos)	ENUNCIADO:

A base de um prisma oblíquo é um semi-hexágono regular ABCD inscrito em um círculo de diâmetro AD = 2R . Seja a face oposta o polígono A'B'C'D' . A face ADD'A' é um retângulo tal que AA' = R e a projeção ortogonal do vértice A sôbre o plano da base está sôbre o prolongamento de BC.

Calcular o volume e a área total do prisma, em função de R.



CÁLCULO do VOLUME:

no Δ retângulo $AA'A_1$:

$\overline{AA_1} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ apótema do hexágono.

$\overline{AA'} = R \rightarrow$ dado.

logo $\overline{A'A_1} = \frac{R}{2} \rightarrow$ altura do prisma.

e volume: $V = B.h \Rightarrow V = \frac{3R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{3R^3\sqrt{3}}{8}}$

CALCULO DA ÁREA TOTAL,

- no Δ retângulo $A'A_1B$: $\left.\begin{array}{l}\overline{A'A_1} = \frac{R}{2} \\ \overline{BA_1} = \frac{R}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \overline{BA'} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

- no losango $AA'B'B$

$$\left(\frac{\overline{B'A}}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{8} \Rightarrow \left(\frac{\overline{B'A}}{2}\right)^2 = \frac{7}{8}\cdot R^2 \Rightarrow \overline{B'A} = \frac{R\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

$$- S_{AA'B'B} = \overline{BA'} \times \frac{\overline{B'A}}{2} = R\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{R\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{AA'B'B} = R^2\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$- S_{ABCD} = \frac{3R}{2} \times \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = 3R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$- S_{AA'D'D} = 2R^2$$

$$- S_{BB'C'C} = R^2$$

logo: Área total

$$A_T = 2S_{AA'B'B} + 2S_{ABCD} + S_{AA'B'D} + S_{BB'C'C}$$

$$A_T = R^2\frac{\sqrt{7}}{2} + 3R^2\frac{\sqrt{3}}{2} + 3R^2$$

$$\boxed{A_T = R^2\left(\frac{6 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}\right)}$$

OBS: Da forma que esta questão está enunciada, sua resolução é IMPOSSÍVEL.

Presume-se que onde se lê: vértice A deveria estar: vértice A'

Na resolução apresentada levamos em conta a hipótese acima citada.

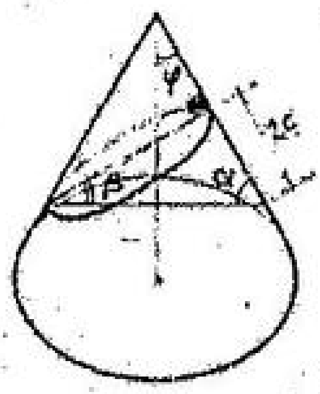
10ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 pontos)	ENUNCIADO:

Uma secção plana de um cone de revolução é uma elipse de excentricidade $\sqrt{3}/3$ cujo eixo maior é perpendicular a uma geratriz dêste sólido.

Pede-se :

a) Determinar o ângulo entre o eixo do cone e suas geratrizes.

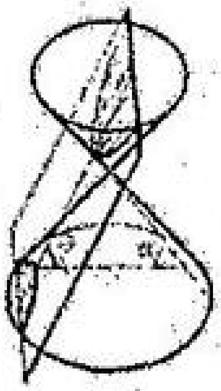
b) Considera-se sôbre o mesmo cone a hipérbole H , de excentricidade máxima, cujo eixo transverso, 2a , é igual a 10cm. Calcular no plano de H , a área da superfície compreendida entre as assíntotas e uma tangente qualquer à hipérbole.



a) $e = \frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{cotg}\alpha \Rightarrow \alpha = 60°$

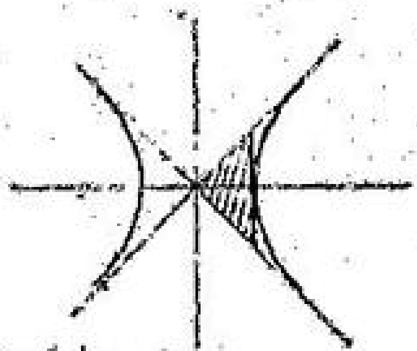
$\boxed{\varphi = 30°}$



b) $e = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$ (será máximo qdo $\operatorname{sen}\beta = 1$)

logo $\beta = 90°$

$e_{máx} = \frac{1}{\operatorname{sen}60°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



S = constante $\Rightarrow S = a.b.$

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$

mas: $c = a.e \Rightarrow c = \frac{5 \times 2\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

como $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

mas: $S = ab$ logo $S = \frac{5\sqrt{3}}{3} \times 5 \Rightarrow \boxed{S = \frac{25\sqrt{3}}{3}\ cm^2}$

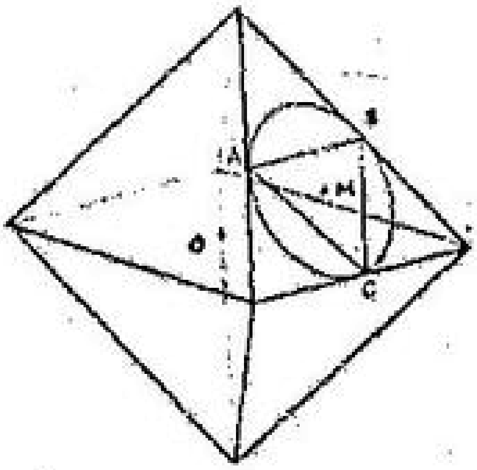
11ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 ponto)	ENUNCIADO:

Toma-se um octaedro (O), regular, de aresta a, e seja (E) a esfera cuja superfície passa pelos pontos médios das arestas de (O).

Pede-se:

a) Calcular a porção do volume de (E) exterior a (O).

b) Calcular a porção do volume de (O) exterior a (E).



a) $R = \frac{a}{2}$

$\overline{OM} = a\frac{\sqrt{6}}{6}$

$$\begin{cases} h_{seg} = R - \overline{OM} = \frac{a}{2} - a\frac{\sqrt{6}}{6} \\ r_{seg} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

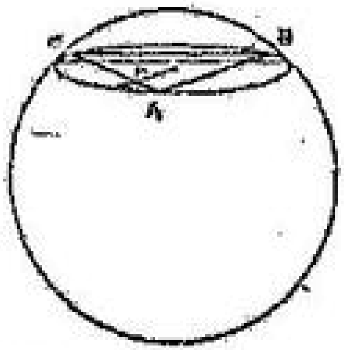
$$V_{seg} = \frac{\pi h}{6}\left(h^2 + 3r^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$V_{seg} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{6}}{6} + \frac{a^2}{24}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V_{E-O} = 8\,V_{seg} = \frac{\pi a^3}{27}\left(18 - 7\sqrt{6}\right)}$$



b) $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$

$$\Downarrow$$

$$V_{esfera} = \frac{\pi a^3}{6}$$

$$V_{octaedro} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

logo: $V_{O-E} = V_{octaedro} - \left(V_{esfera} - 8\,V_{seg}\right)$

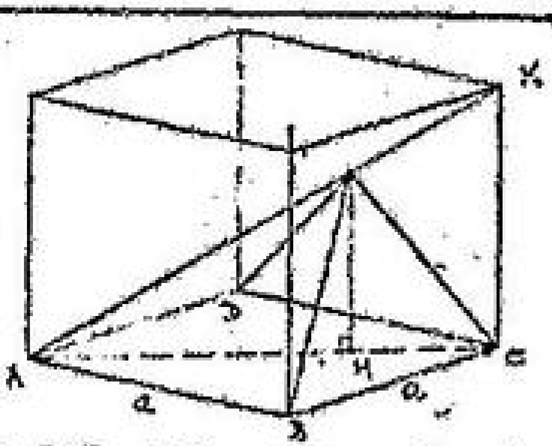
$$\Downarrow$$

$$\boxed{V_{O-E} = \frac{a^3}{54}\left(18\sqrt{2} + \pi\left(27 - 14\sqrt{6}\right)\right)}$$

12ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 ponto)	ENUNCIADO:

Uma pirâmide tem por base uma das faces de um cubo de aresta $\underline{a}$ e o seu vértice $\underline{S}$ está sôbre uma diagonal dêste cubo.

Calcular o volume da pirâmide, sabendo que a soma dos quadrados das arestas concorrentes em $\underline{S}$ é igual a $\underline{4a^2}$.



(1) $\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2 = 4a^2$ (dado)

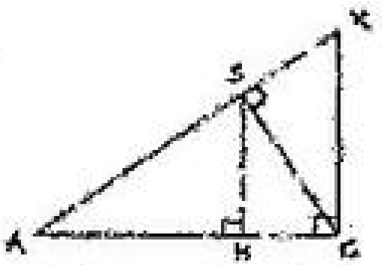
(2) $\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{SB}^2 + \overline{SD}^2$ (propriedade geral para um ponto qualquer – S – do espaço).

(3) $\overline{SB} = \overline{SD}$ (por simetria)

de (1), (2) e (3) $\Rightarrow$ (4) $\overline{SB} = \overline{SD} = a$.

de (1) e (4) $\Rightarrow$ $\overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = 2a^2$

como $\overline{AC}^2 = 2a^2 \Rightarrow \overline{SA}^2 + \overline{SC}^2 = \overline{AC}^2$, o ângulo $A\hat{S}C$ é reto.



$$\begin{cases} \overline{AX} = a\sqrt{3} \\ \overline{AC} = a\sqrt{2} \\ \overline{CX} = a \end{cases}$$

(5) $\overline{CX} . \overline{AC} = \overline{AX} . \overline{SC}$ (triângulo ACX)

(6) $\dfrac{\overline{SH}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{SC}}{\overline{CX}}$ (semelhança)

de (5) e (6) $\Rightarrow$ $\overline{SH} = \dfrac{\overline{CX} . \overline{AC}^2}{\overline{AX}^2} = \dfrac{2}{3} a$

logo: volume $V = \dfrac{1}{3} . a^2 . \overline{SH}$ e finalmente: $\boxed{V = \dfrac{2}{9} a^3}$

13ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 pontos)	ENUNCIADO:

Considera-se uma pirâmide de vértice V cuja base é um hexágono regular, ABCDEF, com 4cm de lado; a aresta VA mede 12cm e é perpendicular ao plano da base; seja e o eixo de simetria do hexágono, que passa por A; sejam π_1, π_4 e π_6 os planos perpendiculares a e que interceptam a pirâmide e distam respectivamente 1, 4 e 6 cm de A.

Pede-se fazer o esboço das seções determinadas na pirâmide por esses planos, indicando as distâncias dos vértices dos polígonos seções ao plano da base da pirâmide.