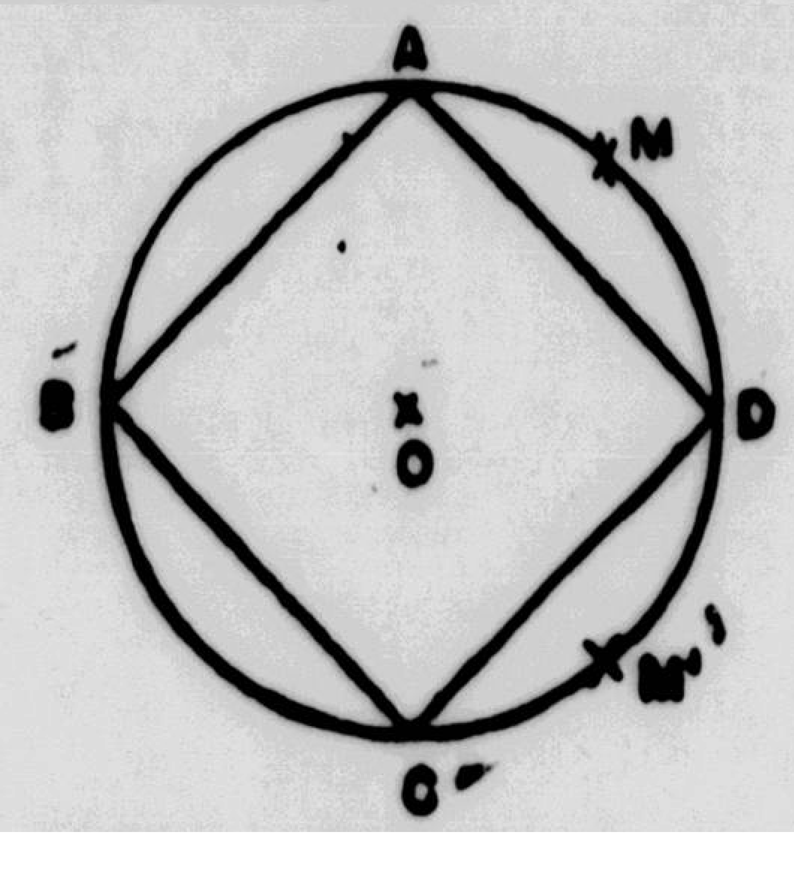
1.ª QUESTÃO — Do vértice A do triângulo ABC, traça-se a mediana AD e a bissetriz AE. Considere a circunferência circunscrita ao triângulo ADE, que corta AB em B' e AC em C'.

Prove que BB' = CC'

2.ª QUESTÃO — Um quadrado ABCD está inscrito numa circunferência de centro O e raio R. Um ponto variável M se desloca sobre o arco ADC tal que MB corta AC em um ponto P, também variável; qualquer que seja a posição do ponto M, MB é bissetriz do ângulo AMC e os triângulos MBC e MAP são semelhantes; para uma posição M' do ponto M, P ocupa a posição P', tal que os triângulos M'BC e M'AP' são iguais.

Pede-se:

a) Os ângulos do triângulo M'P'C;
b) Os segmentos P'C e P'B em função de R;
c) Sendo Q o ponto onde AM' corta CD, demonstrar que o ângulo AP'Q é reto.



3.ª QUESTÃO — Seja uma elipse de focos F e F' e um ponto M qualquer da elipse.

A tangente à elipse em M corta em T e T' as tangentes aos vértices A e A' do eixo maior.

Provar que a circunferência de diâmetro TT' passa pelos focos e que o produto AT x A'T' permanece constante quando o ponto M percorre a elipse.

4.ª QUESTÃO — Considere o diedro PAQB, no qual o ângulo entre os planos P e Q vale 45º, sendo A e B pontos da aresta de interseção dos planos.

Traça-se Ax e By perpendiculares à AB e sobre os semi-planos P e Q respectivamente; sobre Ax toma-se o ponto M cuja projeção ortogonal sobre By é M'.

Dados: AB = d e AM = L, determine os comprimentos BM' e MM'.

5.ª QUESTÃO — Considere uma diagonal do cubo de aresta "a" e um plano perpendicular a esta diagonal que, passando pelo centro do cubo, intercepta-o segundo uma seção S.

Determine o raio da esfera circunscrita ao sólido que tem por base S e por vértice um dos vértices do cubo na extremidade da diagonal considerada.

6.ª QUESTÃO — Pelo vértice V de um tetraedro regular VABC de aresta a, traça-se um plano VB'C' que corta a base do tetraedro paralelamente a BC e divide o seu volume em partes iguais.

Calcular em função de a, o perímetro da seção VB'C', segundo a qual o plano corta o tetraedro.

7.ª QUESTÃO — Considera-se uma esfera de centro O e raio R, inscrita num cone de vértice S, tendo o ângulo do vértice igual a 2 teta.

Seja um plano P tangente à esfera em A, tal que o eixo de revolução do cone intercepta em N o plano, segundo um ângulo alfa (alfa menor que 90º).

Admitindo o ponto O entre S e N, tal que SO maior que ON, mostre que o eixo maior 2a da seção cônica determinada pelo plano P no cone de geratrizes infinitas coincidentes com as geratrizes do cone dado é:

$$2a = \frac{2R\cos\theta}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta}$$

8.ª QUESTÃO — Num triângulo obtusângulo, o ângulo obtuso mede 105º.

Determine o valor de n de modo que os ângulos agudos sejam raízes da equação:

$$\sqrt{3}\sec x + n\left(\frac{1}{\sec x} - \frac{1}{\operatorname{cosec} x}\right) =$$

$$1 + 3\left(\frac{1}{\operatorname{cosec} x} + \frac{1}{\sec x}\right)$$

9.ª QUESTÃO — Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 5 \\ \operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cotg}^2 y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

10ª QUESTÃO — Sabendo-se que:

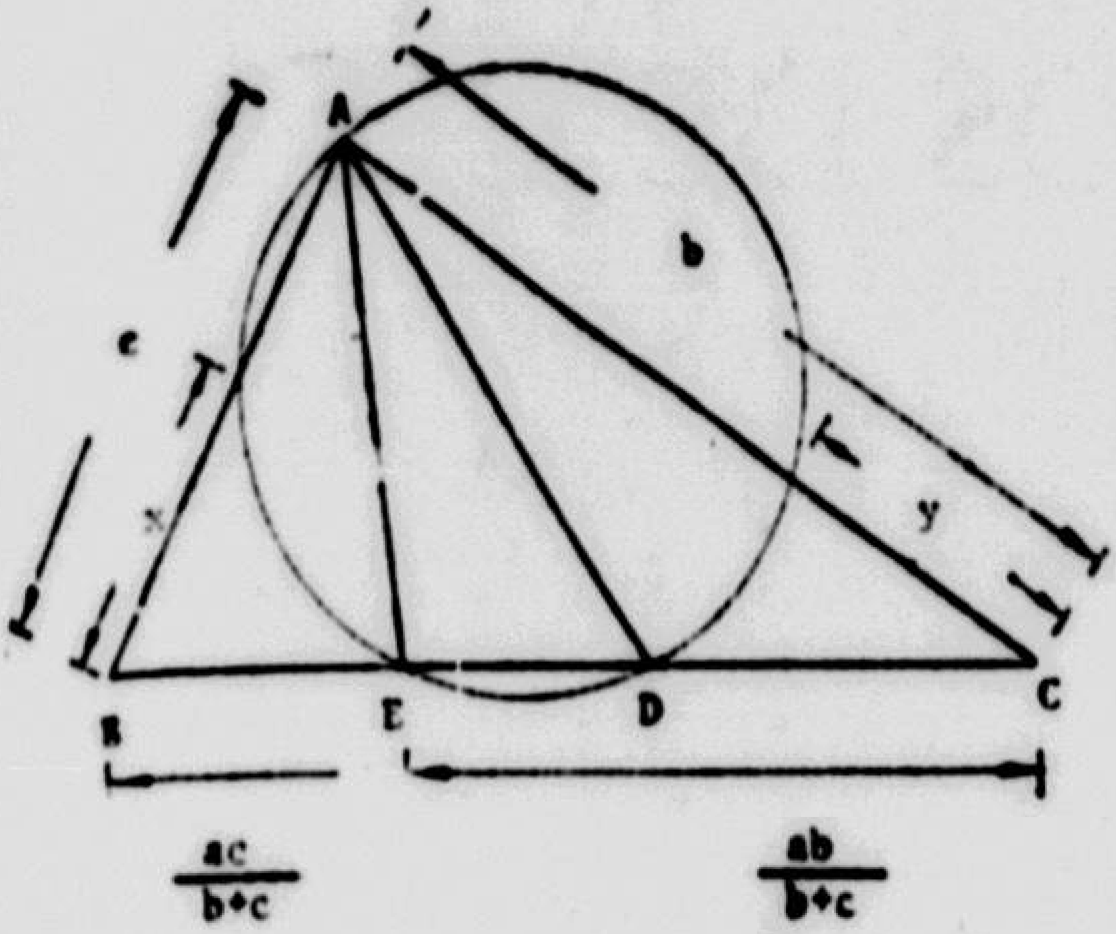
— os pontos P, Q, A e B pertencem a um mesmo plano horizontal;
— os pontos P, Q e B pertencem a um mesmo plano vertical (B exterior a PQ).
— os pontos A e B pertencem a um plano vertical que é perpendicular ao plano vertical que contém P, Q e B;
— a distância entre os pontos P e Q é de 80 metros;
— os ângulos APB e AQB valem 30° e 33°15' respectivamente, calcular, com erro de mais ou menos um metro, a distância entre A e B.

DADOS:

sen 33°15' = 0,55
cos 33°15' = 0,84
tg 33°15' = 0,66

SOLUÇÕES

1ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO:



$$P_B = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{a}{2} = c\,x \Rightarrow$$

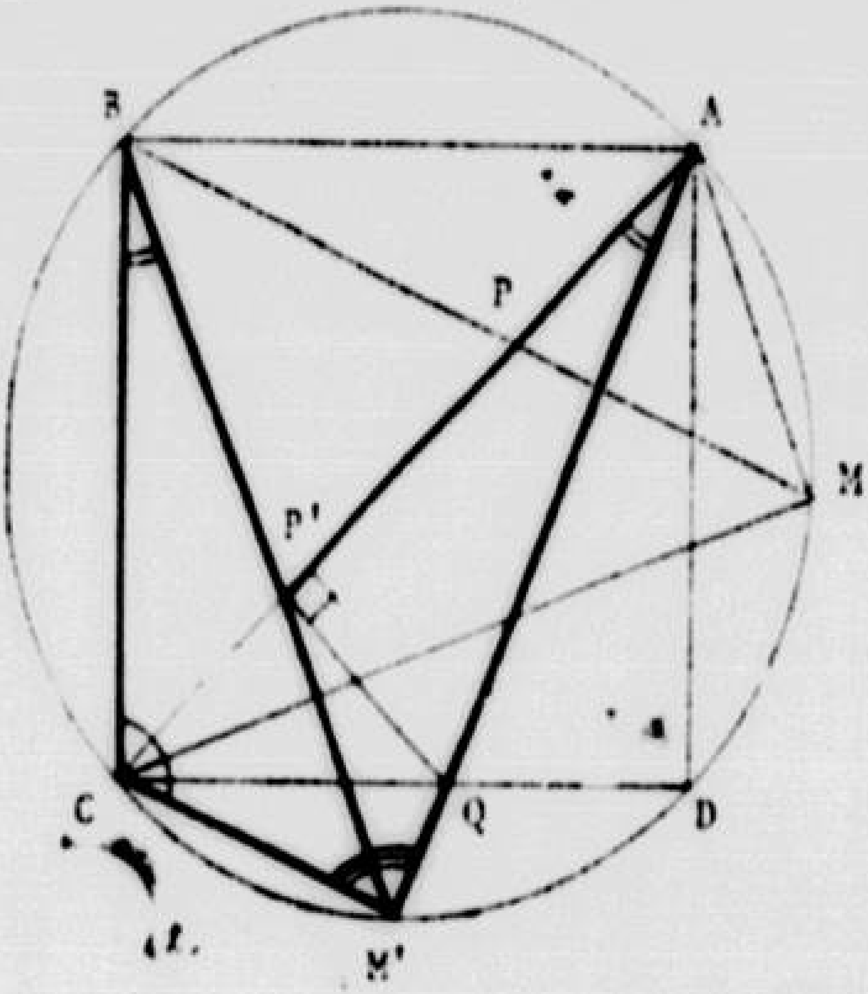
$$\Rightarrow x = \frac{a^2}{2(b+c)}$$

$$P_C = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{a}{2} = b\,y \qquad \Rightarrow \boxed{x = y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{a^2}{2(b+c)}$$

2ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO:

a)



$\hat{PBA} = \hat{CBB} = \frac{90^\circ}{2} = \boxed{45^\circ}$

$\Delta M'BC \equiv \Delta M'AP' \Rightarrow \overline{M'B} = \overline{M'A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overset{\frown}{M'C} = \overset{\frown}{M'D} = 45^\circ \Rightarrow C\hat{B}M' = P'\hat{A}M' =$

$= \boxed{22^\circ 30'}$

$Q\hat{P}'C = 45^\circ + 22^\circ 30' = \boxed{67^\circ 30'}$

(continua)

b)

$\sim$	$\angle$	$\angle$	$\angle$
$\dfrac{\Delta M'CB}{\Delta M'P'A}$	$\dfrac{\overline{BM'}}{\overline{AM'}}$ =	$\dfrac{\overline{CM'}}{\overline{P'M'}}$ =	$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AP'}} = 1$

$$\overline{AP'} = \overline{BC} = R\sqrt{2} = \ell_4$$

$$\overline{P'C} = \overline{AC} - \overline{AP'} = 2R - R\sqrt{2} = R(2-\sqrt{2})$$

$$\overline{P'C} = R(2 - \sqrt{2})$$

$$\overline{P'M'} = \overline{CM'} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = \ell_8$$

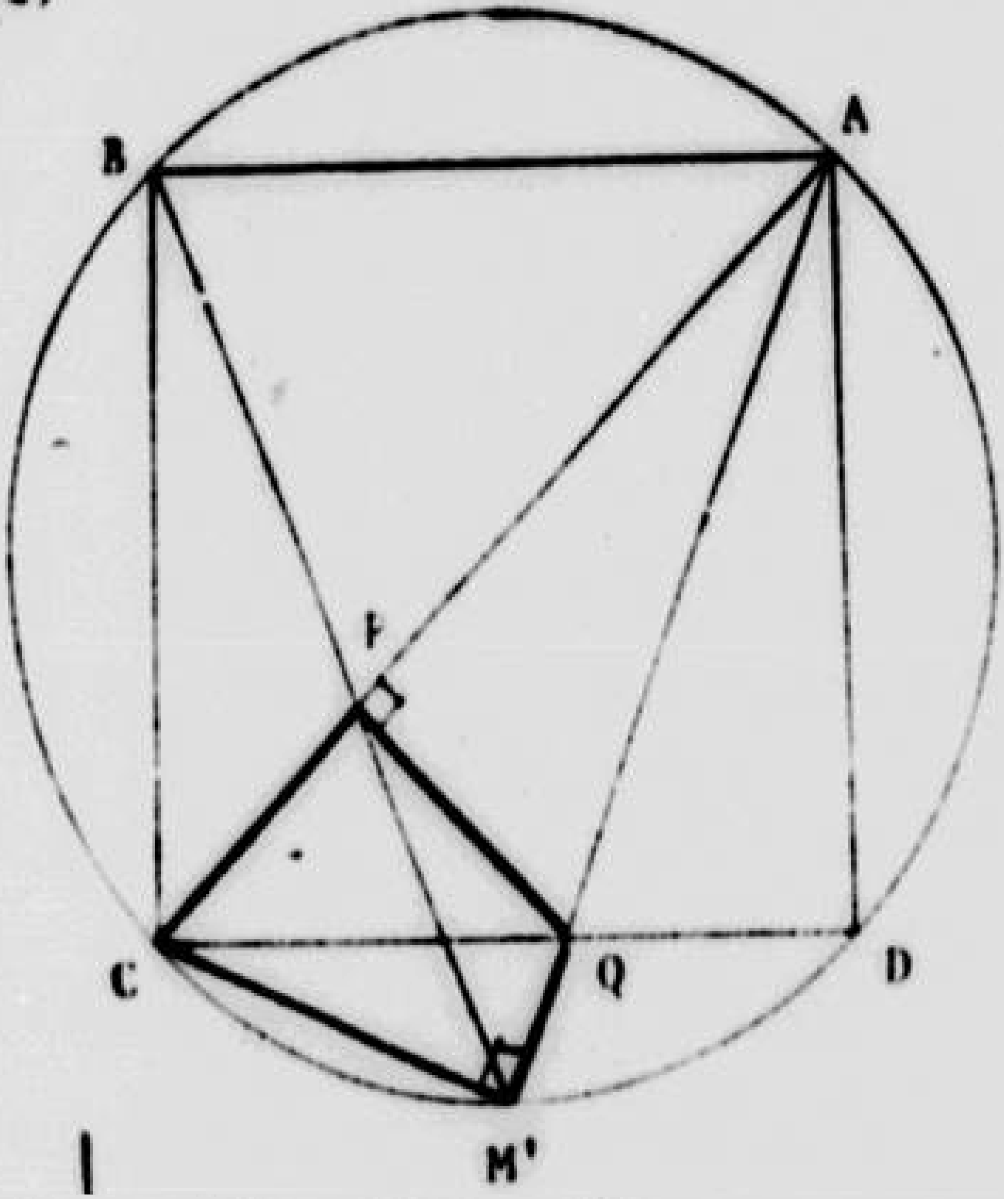
$$\overline{P'B} = \overline{BM'} - \overline{P'M'} = R\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) =$$

$$= R\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$\overline{P'B} = R\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

(continua)

c)



$$P\hat{C}Q = P\hat{M}'Q = 45^{\circ}$$

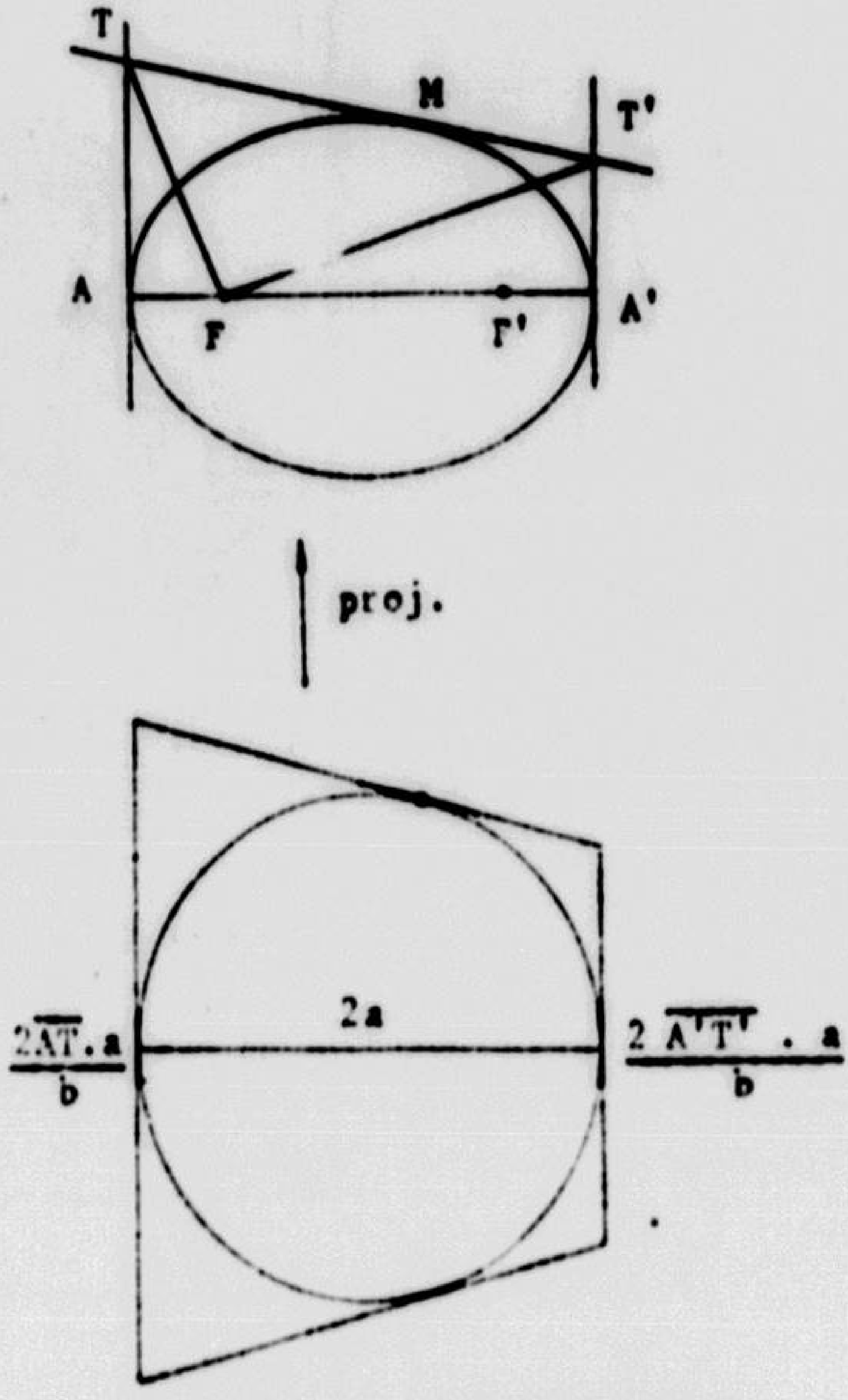
$$\Downarrow$$

CPQM' é inscritível

$$\Downarrow$$

$$C\hat{P}Q = C\hat{M}'Q = 90^{\circ}.$$

3ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO:



TRAPÉZIO ISÓSCELES CIRCUNSCRITÍVEL

(continua)

$$(2a)^2 = \frac{2\,\overline{AT}.a}{b} \cdot \frac{2\,\overline{A'T'}\,.\,a}{b}$$

$$\boxed{\overline{AT}\,.\,\overline{A'T'} = b^2}$$

$$\overline{AT}\,.\,\overline{A'T'} = a^2 - c^2 =$$

$$= (a + c)\quad(a - c) =$$

$$= \overline{A'F}\,.\,\overline{AF}$$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'T'}}$$

E como $T\hat{A}F = T'\hat{A}'F = 90^\circ$, temos a semelhança

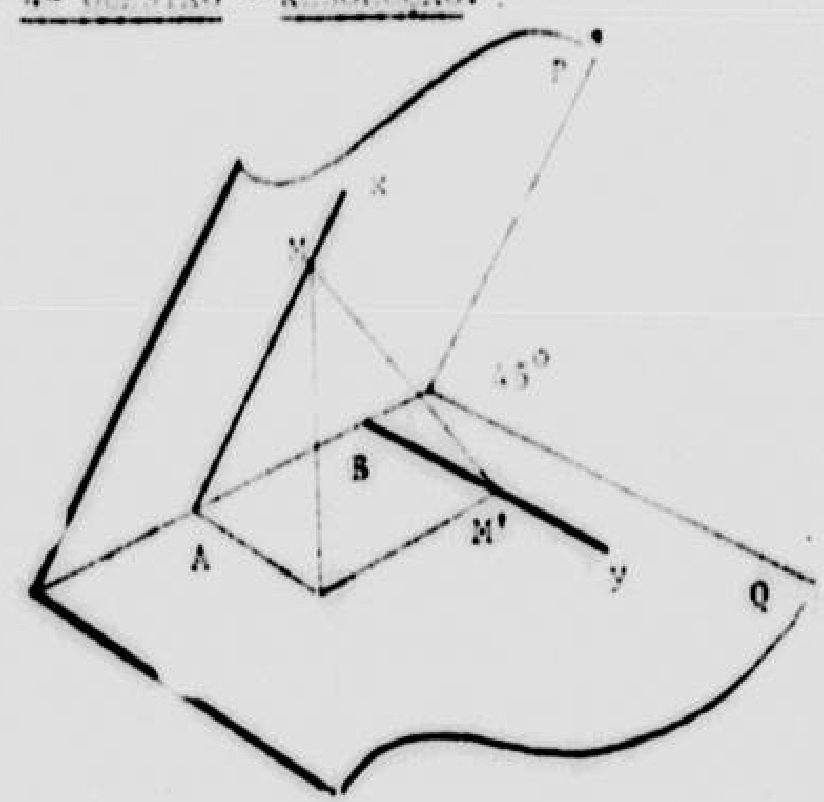
$$\Delta ATF \Leftrightarrow \Delta A'T'F$$

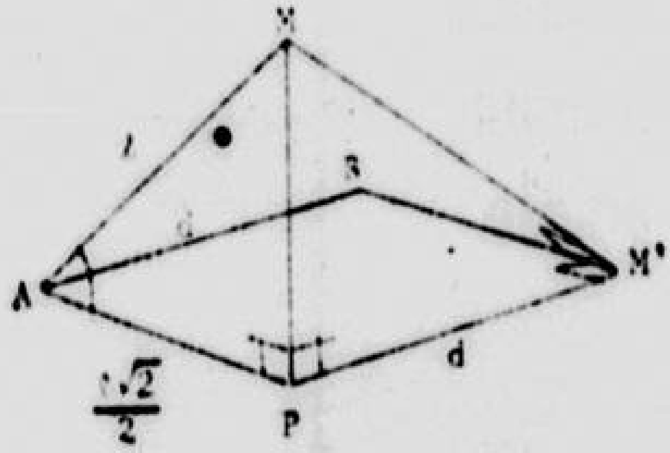
$$A\hat{F}T + A'\hat{F}T' = 90^\circ$$

$$T\hat{F}T' = 90^\circ$$

e analogamente $T\hat{F}'T' = 90^\circ$.

4ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO:





$\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

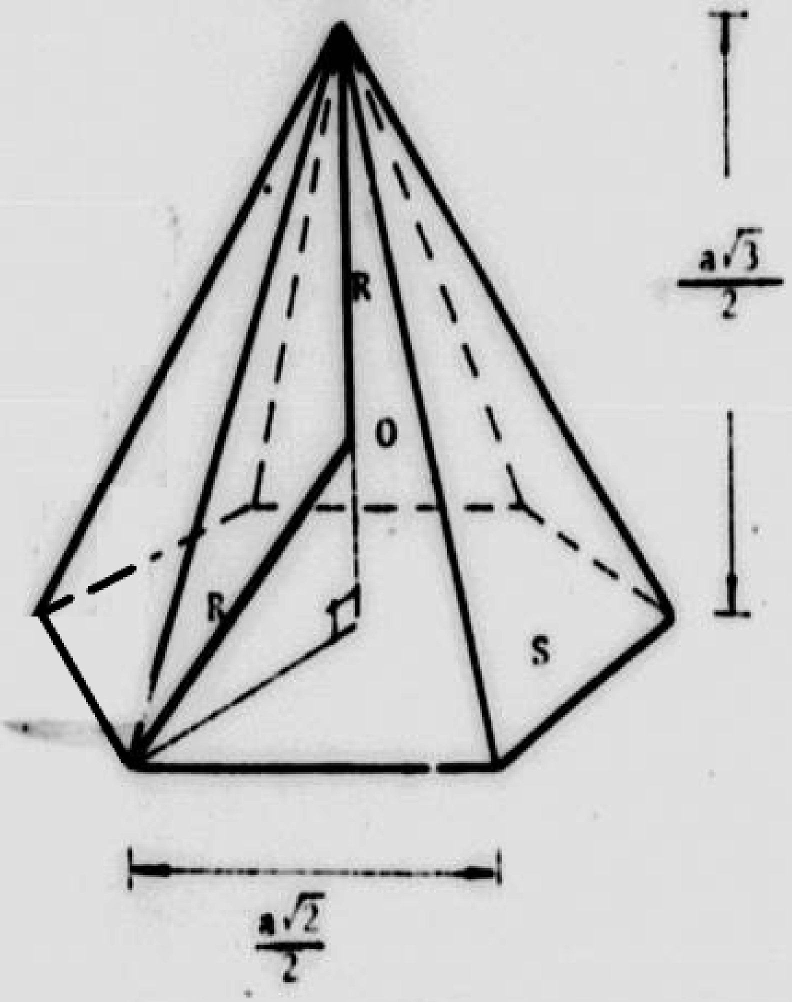
$$\overline{BM'} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = \overline{AP} = \overline{PM}$$

$$\overline{MN'} = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PM'}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 + d^2} \therefore$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2\ell^2 + 4d^2}}{2}$$

5ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO:



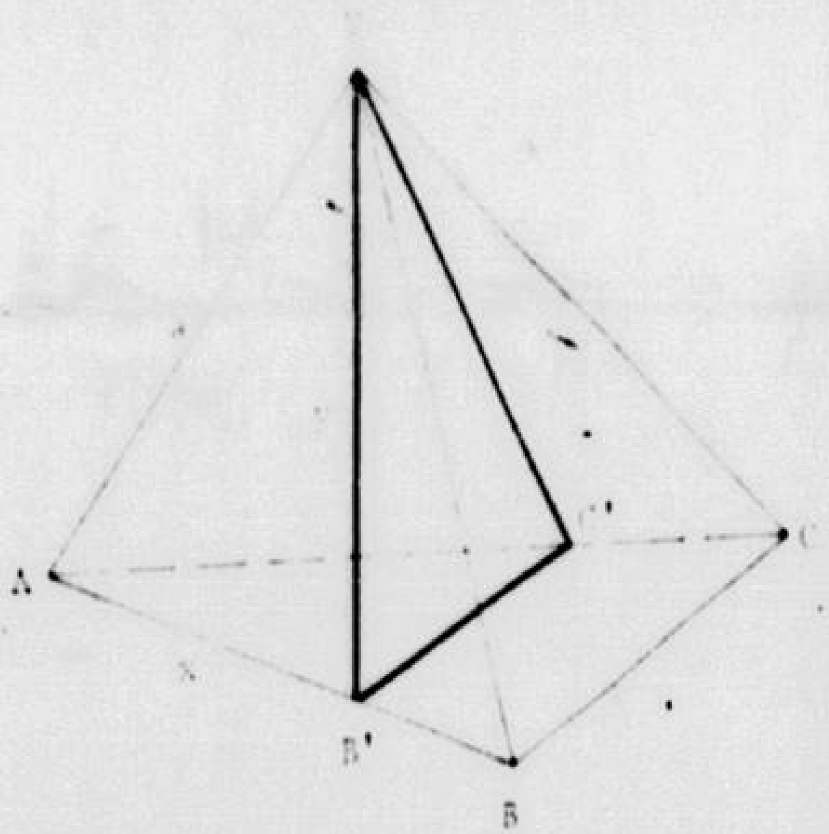
$$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R\right)^2$$

$$R^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + R^2 - aR\sqrt{3}$$

$$aR\sqrt{3} = \frac{5a^2}{4}$$

$$R = \frac{5a}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{5\sqrt{3}a}{12}}$$

6ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO



$(AB'C') \approx (BB'C'C) \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = B'C'$

$\Delta VAB'$

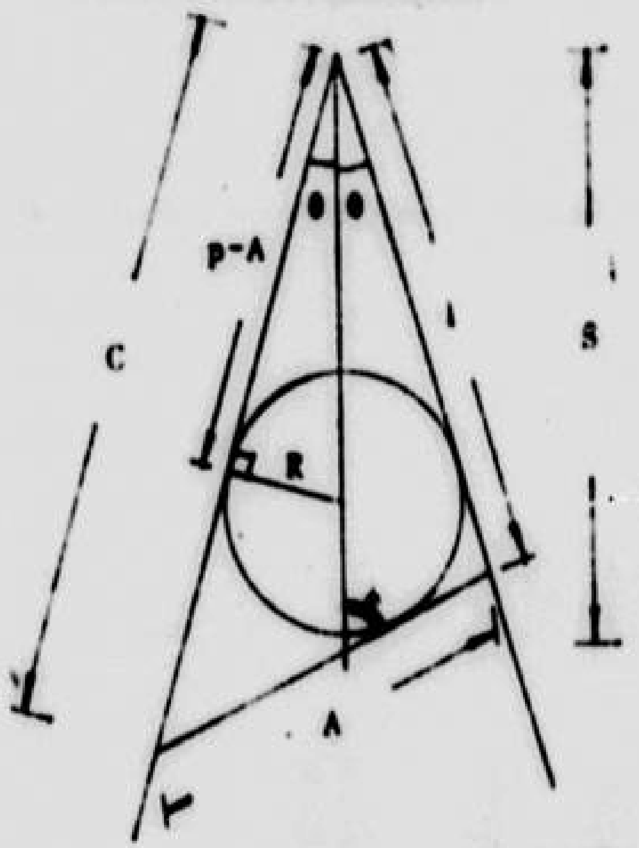
$y^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$y^2 = a^2\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$y = a \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{6 - 2\sqrt{2}}}{2}$

$2p = \frac{2\sqrt{6 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{2}}{2} \cdot a$

7ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO:



$$(p-A)\ tg\ \theta = R \qquad \boxed{p-A = \frac{R}{tg\ \theta}}$$

$$\frac{B\ \beta\ sen\ \theta}{2} + \frac{C\ \beta\ sen\ \theta}{2} = \frac{A\ \beta\ sen\ \phi}{2}$$

$$(B + C) = \frac{A\ sen\ \phi}{sen\ \theta}$$

$$B + C - A = \frac{2R}{tg\ \theta} = A\ \frac{sen\ \phi - sen\ \theta}{sen\ \theta}$$

$$A = \frac{2R\ sen\ \theta}{(sen\ \phi - sen\ \theta)\ tg\ \theta} = \frac{2R\ cos\ \theta}{sen\phi - sen\theta}$$

8ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO

$$3\sec x + n(\cos x - \operatorname{sen} x) = 3(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$3 + n\cos^2 x - n\operatorname{sen} x\cos x = 3\operatorname{sen} x\cos x + 3\cos^2 x$$

$$3 + 3tg^2 x + n - n\,tgx = 3tgx + 3$$

$$3tg^2 x - (n+3)tgx + n = 0$$

$$tgx = \frac{n + 3 \pm \sqrt{n^2 - 6n + 9}}{6}$$

$$tgx = \frac{n + 3 + (n-3)}{6} = \frac{n}{3};$$

$$tgx = \frac{n + 3 - n + 3}{6} = 1 \Rightarrow x = 45^\circ$$

$$180 - 105 = 75^\circ$$

O terceiro ângulo mede 30°

$$tg\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\, 30^\circ = \frac{n}{3}$$

$$\boxed{n = \sqrt{3}}$$

RESPOSTA: $n = \sqrt{3}$

9ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO

$$\begin{cases} tg^2 x + tg^2 y = 4 \\ ctg^2 x + ctg^2 y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg^2 x + tg^2 y = 4 \\ \dfrac{1}{tg^2 x} + \dfrac{1}{tg^2 y} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

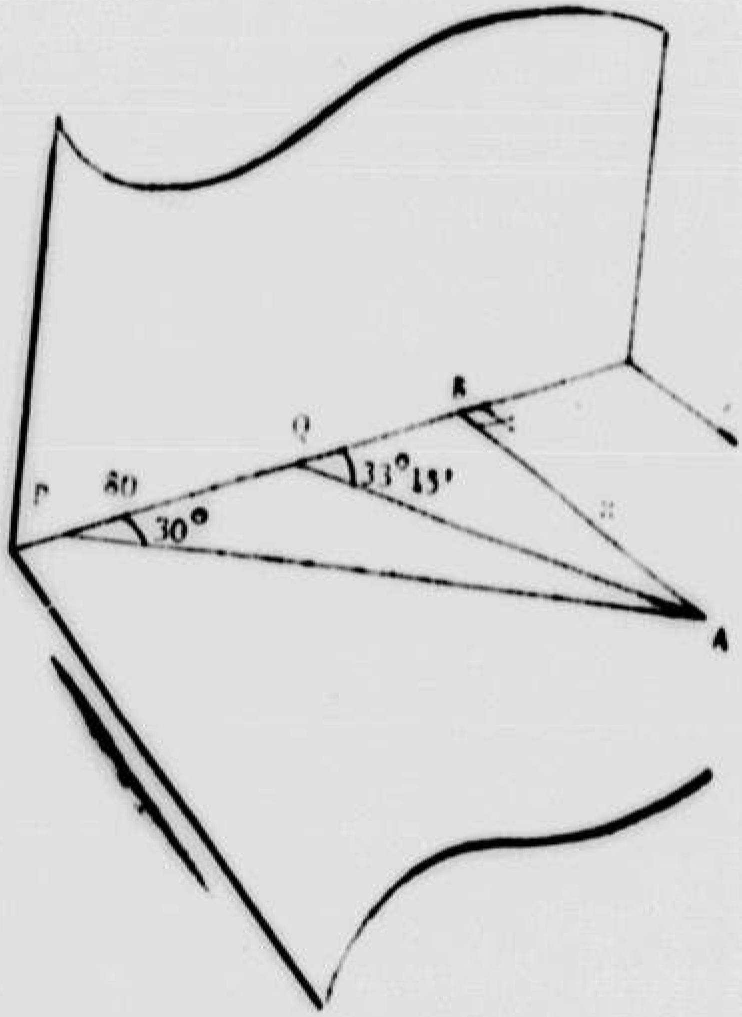
$$\begin{cases} tg^2 x = 3 \\ tg^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} tg^2 x = 1 \\ tg^2 y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\, x = \pm \sqrt{3} \\ tg\, y = \pm 1 \end{cases}$$

RESPOSTA:

$$\begin{cases} x = k180^\circ \pm 60^\circ \\ y = k180^\circ \pm 45^\circ \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = k180^\circ \pm 60^\circ \\ x = k180^\circ \pm 45^\circ \end{cases}$$

10ª QUESTÃO - RESOLUÇÃO:



$$x = (80 + 80)\ \frac{\sqrt{3}}{3}$$

[redacted]

$$x = \left(80 + \frac{x}{tg\ 33°15'}\right) tg\ 30°$$

$$x = \frac{80tg33°15' + x}{tg33°15'} \cdot tg\ 30°$$

$$\therefore$$

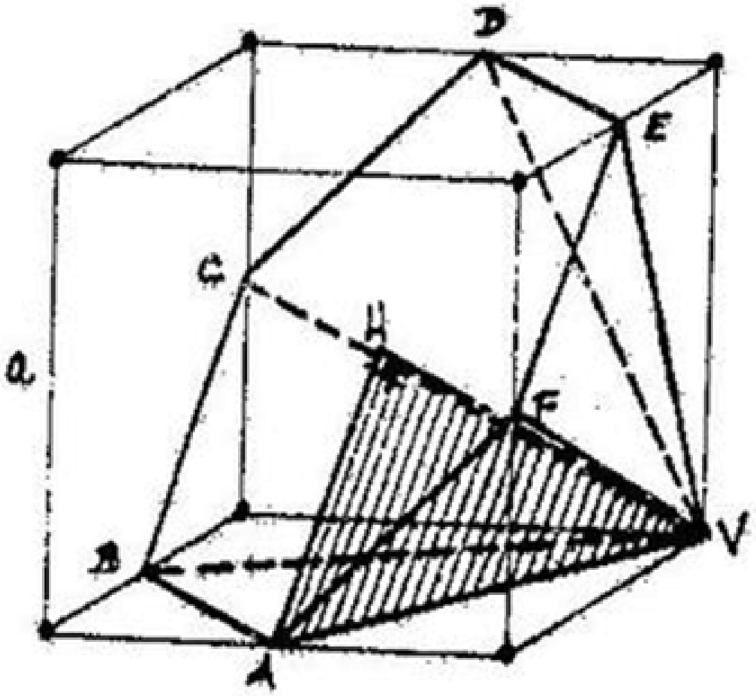
$$x(tg33°15' - tg30°) = 80tg33°15' . tg30°$$

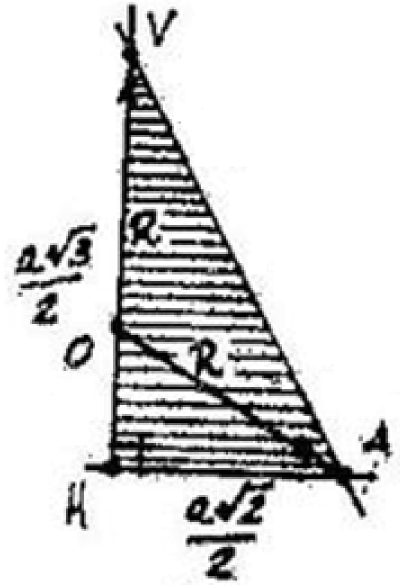
$$\therefore$$

$$x . 0,08 = 80 \times 0,66 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x . 0,08 = 80 \times 0,22 \times 1,7 .$$

$$x = 381m$$





A base da pirâmide regular é um hexágono regular de lado $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Então :

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$VH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do $\triangle$ OAH retângulo, temos :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2$$

$$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\cancel{R^2} = \frac{3a^2}{4} - aR\sqrt{3} + \cancel{R^2} + \frac{a^2}{2}$$

$$aR\sqrt{3} = \frac{5a^2}{4} \quad \therefore \quad \boxed{R = \frac{5\sqrt{3}}{12}\,a}$$