IME – GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA – 1975/1976
Enunciados: JS, 25/11/1975, pág. 13
Soluções: JS, 26/11/1975, pág. 13, e 28/11/1975, pág. 13

INSTRUÇÕES PARA REALIZAÇÃO DA PROVA

1. NÃO ASSINE A PROVA.

2. Você tem 10 (dez) minutos para examinar a prova, no que diz respeito a sua montagem. Ela contém, além da capa e desta Folha de Instruções, mais 16 (dezesseis) folhas de Questões, numeradas de 1 (um) a 16 (dezesseis) e 8 (oito) folhas de rascunho, não numeradas. A prova consta de 8 (oito) questões, cada uma delas valendo 1,25 (um vírgula vinte e cinco) pontos. O valor dos itens consta dos enunciados.

3. Decorridos os 10 (dez) minutos iniciais, nenhum candidato poderá mais dirigir-se à Comissão Fiscalizadora. A interpretação das questões faz parte da resolução. Em momento algum faça perguntas neste sentido.

4. O espaço destinado a solução de cada questão é suficiente. Portanto, não será considerada resolução fora do local especificamente designado. Não será fornecido material suplementar. Não serão consideradas as soluções ou os desenvolvimentos apresentados no rascunho.

5. Não serão aceitas soluções gráficas das Questões propostas.

6. Utilize a caneta esferográfica fornecida pela Comissão Fiscalizadora. As figuras julgadas necessárias poderão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores. É permitida a utilização de régua, esquadro, compasso, borracha.

7. A prova está sob a forma de caderno. Não é permitido destacar suas folhas nem desgrampear o caderno. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido.

8. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Seja sucinto, evitando divagações.

9. Duração da Prova: 4 horas.

B O A S O R T E

EM

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

1a. QUESTÃO

ITEM A (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Considere um triângulo ABC, com os ângulos internos representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. São dados:

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = m \quad ,e, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = n.$$

Determine $\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2}$ em função de m e n, especificando a condição a ser imposta ao produto mn para que o triângulo ABC exista.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

1a. QUESTÃO

ITEM B (0,75 pontos)

ENUNCIADO:

Considere um triângulo ABC, com os ângulos internos representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. São dados:

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = m \quad ,e, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = n.$$

Determine o valor do produto mn, para que o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ seja igual à média aritmética dos outros dois lados.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

2a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,25 pontos)

ENUNCIADO:

Considere um TRIÂNGULO EQUILÁTERO ABC e um ponto M em seu interior. A partír de M traçam-se três retas perpendiculares aos lados do triângulo ABC. Estas retas encontram os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo nos pontos D, E, F, respectivamente. Sabendo que

$$\frac{\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{ME}}{3} = \frac{\overline{MD}}{5}$$

e que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 20 metros, calcule a área do triângulo AEF.

SOLUÇÃO

3a. QUESTÃO

ITEM A (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Em um TRIÂNGULO ABC são dados o perímetro 2p, o raio da circunferência inscrita r e a altura h sobre o lado $\overline{BC}$ = a. Deduza as fórmulas que permitem calcular, em função de p, r e h, o lado $\overline{BC}$ = a, a soma $\overline{AC} + \overline{AB}$ = b + c e o produto $\overline{AC}.\overline{AB}$ = bc, dos outros dois lados.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

3a. QUESTÃO
ITEM B (0,25 pontos)

ENUNCIADO:

Em um TRIÂNGULO ABC, de perímetro 2p, o raio da circunferência inscrita é igual a r e a altura sobre o lado $\overline{BC} = a$ é igual a h. Determine p em função de r e h para que o triângulo ABC seja retângulo em A.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

4a. QUESTÃO
ITEM A (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Considere um TRIÂNGULO EQUILÁTERO ABC, de lado 2k. O lado $\overline{AB}$ está contido na interseção dos planos π_1 e π_2. H_1 é a projeção ortogonal de C sobre π_1 e H_2 é a projeção ortogonal de C sobre π_2. Calcule $\overline{CH_1}$ em função de k, supondo que o ângulo $\widehat{AH_1B} = 120^\circ$.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

4a. QUESTÃO
ITEM B (0,75 pontos)

ENUNCIADO:

Considere um TRIÂNGULO EQUILÁTERO ABC, de lado 2k. O lado $\overline{AB}$ está contido na interseção dos planos π_1 e π_2. H_1 é a projeção ortogonal de C sobre π_1 e H_2 é a projeção ortogonal de C sobre π_2. Calcule o volume V do TETRAEDRO $ABCH_2$, em função de k, sabendo que o quadrado da área de uma das faces do TETRAEDRO é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

5a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,25 pontos)

ENUNCIADO:

Em um plano são dados A e F', tais que $\overline{AF'} = 3$. Represente a mediatriz do segmento $\overline{AF'}$ por d'. Seja (h) uma HIPÉRBOLE que tem A como vértice de um dos ramos, F' como foco situado na concavidade do outro ramo e d' a diretriz associada a F'. Calcule a excentricidade de (h), a distância de A ao centro de (h) e o ângulo (no interior do qual está um ramo de (h)) que as assíntotas de (h) formam entre si.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

6a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,25 pontos)

ENUNCIADO:

Considere um TRAPÉZIO ISÓSCELES ABCD. A base maior $\overline{AB} = 2$ é constante. A altura x do Trapézio é variável e os lados não paralelos são $\overline{AD} = \overline{BC} = 2x$. S_1 e S_2 são as áreas totais dos sólidos de revolução obtidos girando-se o Trapézio, respectivamente, em tôrno das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Suponha que

$$k = \frac{S_1}{S_2}.$$

Exprima x em função de k, determine o valor de k que corresponde a um TRAPÉZIO CIRCUNSCRITÍVEL (T) e calcule o raio da circunferência na qual êste TRAPÉZIO (T) está inscrito.

SOLUÇÃO

7a. QUESTÃO

ITEM A (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Considere duas RETAS REVERSAS ORTOGONAIS r_1 e r_2. A_1 é um ponto de r_1, A_2 é um ponto de r_2, $\overline{A_1A_2} = k$ é perpendicular comum a r_1 e r_2. Seja (e) a esfera de diâmetro $\overline{A_1A_2}$ e t uma reta tangente a (e) em um ponto M variável de (e), com a condição de t encontrar r_1 em P_1 e r_2 em P_2. Sendo $\overline{A_1P_1} = x_1$, e, $\overline{A_2P_2} = x_2$, calcule o produto x_1x_2 em função de k.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

7a. QUESTÃO
ITEM B (0,75 pontos)

ENUNCIADO:

Considere duas RETAS REVERSAS ORTOGONAIS, r_1 e r_2. A_1 é um ponto de r_1, A_2 é um ponto de r_2, $\overline{A_1A_2} = k$ é perpendicular comum a r_1 e r_2. Seja (e) a esfera de diâmetro $\overline{A_1A_2}$ e t uma reta tangente a (e) em um ponto M variável de (e), com a condição de t encontrar r_1 em P_1 e r_2 em P_2. π_1 é o plano que contém r_1 e A_2. π_2 é o plano que contém r_2 e A_1. Calcule as distâncias de M aos planos π_1 e π_2, em função de $\overline{A_1P_1} = x_1$ e $\overline{A_2P_2} = x_2$, especificando o lugar geométrico descrito pelo ponto M.

SOLUÇÃO

RESPOSTA:

8a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,25 pontos)

ENUNCIADO:

Considere,

$$E = \left[\text{sen}\,\frac{1\pi n}{N}\right]^2 + \left[\text{sen}\,\frac{2\pi n}{N}\right]^2 + \dots + \left[\text{sen}\,\frac{N\pi n}{N}\right]^2 = \sum_{k=1}^{N}\left[\text{sen}\,\frac{k\pi n}{N}\right]^2$$

N e n são números inteiros, tais que $0 < n < N$. Calcule E em função de N.

SOLUÇÕES

1a. QUESTÃO
ITEM A (0,5 pontos)

ENUNCIADO:
Considere um triângulo ABC, com os ângulos internos representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. São dados:

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} = m \quad ,e, \quad \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} = n.$$

Determine $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}$ em função de m e n, especificando a condição a ser imposta ao produto mn para que o triângulo ABC exista.

SOLUÇÃO

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = m > 0$$

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \frac{m+n}{1-mn}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = n > 0$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1-mn}{m+n}} > 0 \Rightarrow 1 - mn > 0$$

1a. QUESTÃO
ITEM B (0,75 pontos)

ENUNCIADO:
Considere um triângulo ABC, com os ângulos internos representados por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. São dados:

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} = m \quad ,e, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = n.$$

Determine o valor do produto mn, para que o lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ seja igual à média aritmética dos outros dois lados.

SOLUÇÃO

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b+c}{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}$$

$$\frac{a}{\cancel{2} \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \cancel{\frac{A}{2}}} = \frac{2a}{\cancel{2} \operatorname{sen} \cancel{\frac{B+C}{2}} \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

$$\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 3 \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \qquad \boxed{mn = \frac{1}{3}}$$

2a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,25pontos)

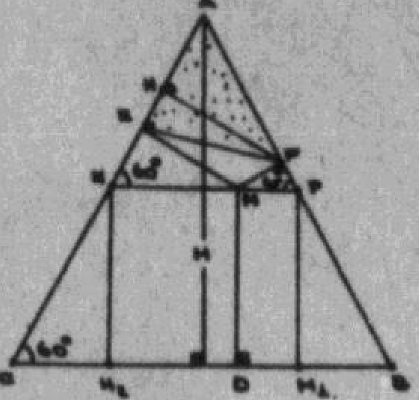
ENUNCIADO:

Considere um TRIÂNGULO EQUILÁTERO ABC e um ponto M em seu interior. A partir de M traçam-se três retas perpendiculares aos lados do triângulo ABC. Estas retas encontram os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo nos pontos D, E, F, respectivamente. Sabendo que

$$\frac{\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{ME}}{3} = \frac{\overline{MD}}{5}$$

e que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 20 metros, calcule a área do triângulo AEF.

SOLUÇÃO



$$\overline{MD} + \overline{ME} + \overline{MF} = H$$

$$\boxed{S_{AEF} = \frac{1}{2}\,\overline{AF}\cdot\overline{AE}\,\text{sen}\,60^\circ}$$

Seja a o lado do triângulo

$$\frac{\overline{MF}}{2} = \frac{\overline{ME}}{3} = \frac{\overline{MD}}{5} = \frac{\overline{MF}+\overline{ME}+\overline{MD}}{10} = \frac{a\sqrt{3}/2}{10} =$$

$$= \frac{R\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{20} = \frac{20 \cdot 3}{20} = 3$$

$$\overline{PH_1} = \overline{NH_2} = \overline{MD} = 15$$

Daí:

$$\overline{PB} = \frac{\overline{PH_1}}{\text{sen}\,60^\circ} = \frac{15}{\sqrt{3}/2} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\overline{NC} = \overline{PB} = 10\sqrt{3}$$

Do Δ MFP:

$$\overline{PF} = \overline{FM}\,\text{cotg}\,60^\circ = \frac{\overline{FM}\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

Do Δ MEN:

$$\overline{EN} = \overline{EM}\,\text{cotg}\,60^\circ = \frac{\overline{EM}\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

Então: $AF = AB - BP - PF = 20\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

$AE = AC - CN - NE = 20\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

Donde:

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 42\sqrt{3}\,m^2$$

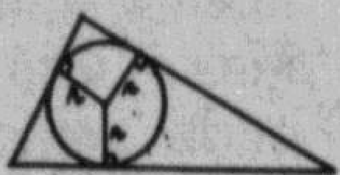
3a. QUESTÃO

ITEM A (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Em um TRIÂNGULO ABC são dados o perímetro 2p, o raio da circunferência inscrita r e a altura h sobre o lado $\overline{BC} = a$. Deduza as fórmulas que permitem calcular, em função de p, r e h, o lado $\overline{BC} = a$, a soma $\overline{AC} + \overline{AB} = b' + c$ e o produto $\overline{AC}.\overline{AB} = bc$, dos outros dois lados.

SOLUÇÃO



p → semiperímetro
r → raio do círculo inscrito
h → altura do triângulo

i) $S = pr$

$$S = \frac{ah}{2} \rightarrow \frac{ah}{2} = pr \rightarrow \boxed{a = \frac{2pr}{h}}$$

ii) $$b + c = 2p - a = 2p - \frac{2pr}{h} = \frac{2p(h-r)}{h}$$

iii) $$\underbrace{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}_{S} = \underbrace{pr}_{S}$$

$$(p-a)(p-b)(p-c) = pr^2$$

$$(p-b)(p-c) = \frac{pr^2}{p-a}$$

$$p^2 - (b+c)p + bc = \frac{pr^2}{p-a} \rightarrow bc = \frac{pr^2}{p-a} + (b+c)p - p^2 =$$

$$= p\left[\frac{r^2}{p-a} + (b+c) - p\right] = p\left[\frac{r^2}{p-a} + 2p - a - p\right] = p\left[\frac{r^2}{p-a} + p - a\right] =$$

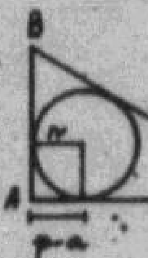
$$= p\left[\frac{r^2}{p - \frac{2pr}{h}} + p - \frac{2pr}{h}\right] = p\left[\frac{r^2 h}{p(h-2r)} + \frac{p(h-2r)}{h}\right]$$

3a. QUESTÃO
ITEM B (0,25 pontos)

ENUNCIADO:

Em um TRIÂNGULO ABC, de perímetro 2p, o raio da circunferência inscrita é igual a r e a altura sobre o lado $\overline{BC}$ = a é igual a h. Determine p em função de r e h para que o triângulo ABC seja retângulo em A.

SOLUÇÃO



$$r = p - a \rightarrow r = p - \frac{2pr}{h} \rightarrow r = p\left[1 - \frac{2r}{h}\right] \rightarrow$$

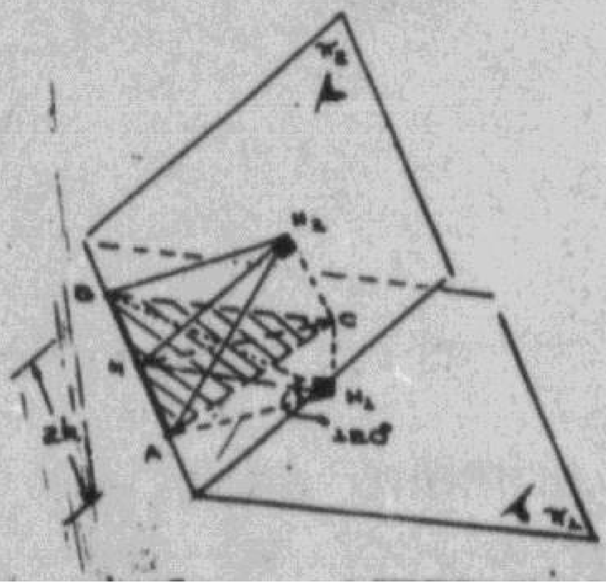
$$\rightarrow \boxed{p = \frac{rh}{h - 2r}}$$

4a. QUESTÃO
ITEM A (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Considere um TRIÂNGULO EQUILÁTERO ABC, de lado 2k. O lado $\overline{AB}$ está contido na interseção dos planos π_1 e π_2. H_1 é a projeção ortogonal de C sobre π_1 e H_2 é a projeção ortogonal de C sobre π_2. Calcule $\overline{CH_1}$ em função de k, supondo que o ângulo $\widehat{AH_1B} = 120°$.

SOLUÇÃO



$$A\hat{B}H_1 = 30°$$

$$\frac{\overline{MH_1}}{K} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{MC} = K\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \Delta MH_1C$$

$$\overline{CH_1}^2 = 3K^2 - \frac{K^2}{3} = \frac{8K^2}{3}$$

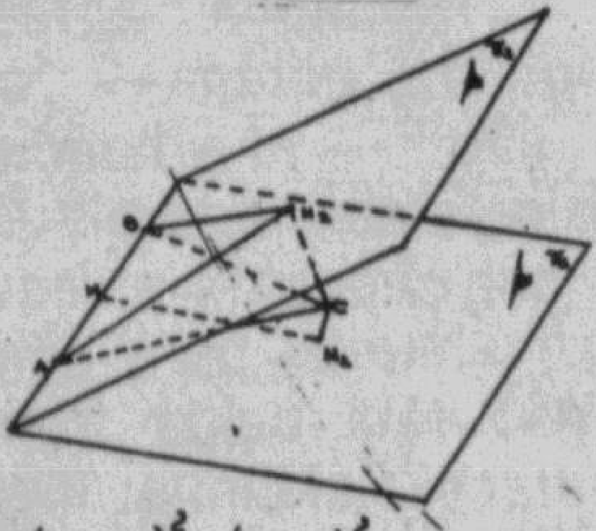
$$\boxed{CH_1 = \frac{2K\sqrt{6}}{3}}$$

4a. QUESTÃO
ITEM B (0,75pontos)

ENUNCIADO:

Considere um TRIÂNGULO EQUILÁTERO ABC, de lado 2k. O lado $\overline{AB}$ está contido na interseção dos planos π_1 e π_2. H_1 é a projeção ortogonal de C sobre π_1 e H_2 é a projeção ortogonal de C sobre π_2. Calcule o volume V do TETRAEDRO $ABCH_2$, em função de k, sabendo que o quadrado da área de uma das faces do TETRAEDRO é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.

SOLUÇÃO



$$S^2_{ABH_2} + 2\left(S_{ACH_2}\right)^2 = \left(S_{ABC}\right)^2$$

$$\left(K\cdot\overline{MH_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\overline{AH_2}\cdot\overline{H_2C}}{2}\right)^2 = \left(K\cdot K\sqrt{3}\right)^2 ,$$

$$\left(K\cdot\sqrt{3K^2-\overline{CH_2}^2}\right)^2 + \frac{\left(\sqrt{4K^2-\overline{H_2C}^2}\cdot\overline{H_2C}\right)^2}{2} = 3K^4$$

$$2\left(\cancel{3K^4} - K^2\,\overline{CH_2}^2\right) + \left(4K^2-\overline{H_2C}^2\right)\overline{H_2C}^2 = \cancel{6K^4}$$

$$\cancel{\overline{H_2C}^2}\left(4K^2-2K^2\right) = \overline{H_2C}^{\cancel{4}2} \rightarrow \overline{H_2C} = K\sqrt{2}$$

$$\overline{MH_2}^2 = 3K^2 - K^2 = K^2$$

$$V = \frac{1}{3}\,K\cdot K\cdot K\sqrt{2}$$

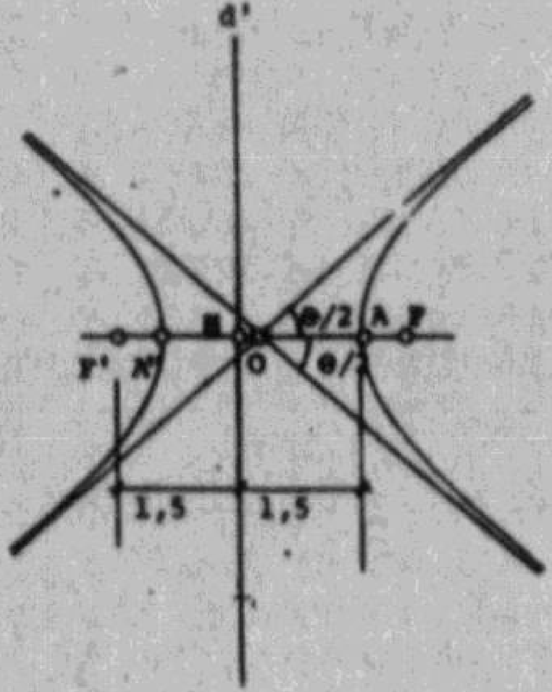
$$V = \frac{K^3\sqrt{2}}{3}$$

5a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,25pontos)

ENUNCIADO:

Em um plano são dados A e F', tais que $\overline{AF'} = 3$. Represente a mediatriz do segmento $\overline{AF'}$ por d'. Seja (h) uma HIPÉRBOLE que tem A como vértice de um dos ramos, F' como foco situado na concavidade do outro ramo e d' a diretriz associada a F'. Calcule a excentricidade de (h), a distância de A ao centro de (h) e o ângulo (no interior do qual está um ramo de (h)) que as assíntotas de (h) formam entre si.

SOLUÇÃO



(i) $\begin{cases} \dfrac{\overline{AF'}}{\overline{AH}} = 2 = \dfrac{c}{a} = e \\ \overline{AF'} = 3 = a + c \end{cases} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$

(ii) $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow$

$\longrightarrow \dfrac{\theta}{2} = 60^\circ \longrightarrow \theta = 120^\circ.$

RESPOSTA:

$e = 2$

$\overline{OA} = 1$

$\theta = 120°$

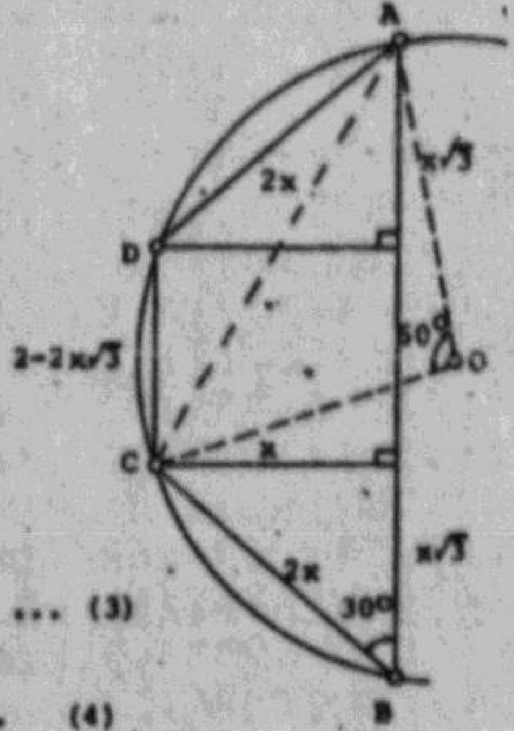
6a. QUESTÃO ITEM ÚNICO (1,25 pontos)	

ENUNCIADO:

Considere um TRAPÉZIO ISÓSCELES ABCD. A base maior $\overline{AB} = 2$ é constante. A altura x do Trapézio é variável e os lados não paralelos são $\overline{AD} = \overline{BC} = 2x$. S_1 e S_2 são as áreas totais dos sólidos de revolução obtidos girando-se o Trapézio, respectivamente, em tôrno das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Suponha que

$$k = \frac{S_1}{S_2}.$$

Exprima x em função de k, determine o valor de k que corresponde a um TRAPÉZIO CIRCUNSCRITÍVEL (T) e calcule o raio da circunferência na qual êste TRAPÉZIO (T) está inscrito.



SOLUÇÃO

(i) $S_1 = 2\pi x(2-2x/\sqrt{3}) + 2\pi x.2x =$
$= 4\pi x(1 - x/\sqrt{3} + x).$

$S_2 = 2\pi x.2 + 2\pi x.2x =$
$= 4\pi x(1 + x).$

$k = \dfrac{1 - x/\sqrt{3} + x}{1 + x}$ ... (1)

Logo $\boxed{x = \dfrac{1 - k}{k + \sqrt{3} - 1}}$ ... (2)

(ii) Se o trapézio é circunscritível (Pitot):

$2 - 2x/\sqrt{3} + 2 = 4x \longleftrightarrow x = 2(2 - \sqrt{3})$ ... (3)

(iii) (3) em (1): $\boxed{k = \frac{1}{13}(19 - 8\sqrt{3})}$ ... (4)

(iv) Seja $\underline{O}$ o centro da circunferência circunscrita:

$A\hat{O}C = 60^\circ \longrightarrow \Delta AOC$ é equilátero $\longrightarrow$
$\longrightarrow \overline{AC}^2 = 2^2 + (2x)^2 - 2.2x.\cos 30^\circ$ ... (5)

(3) em (5): $\boxed{\overline{AC} = 2\sqrt{32 - 18\sqrt{3}} = \overline{OC}}$.

RESPOSTA:

$x = (1 - k)/(k + \sqrt{3} - 1)$

$k = (1/13)(19 - 8\sqrt{3})$

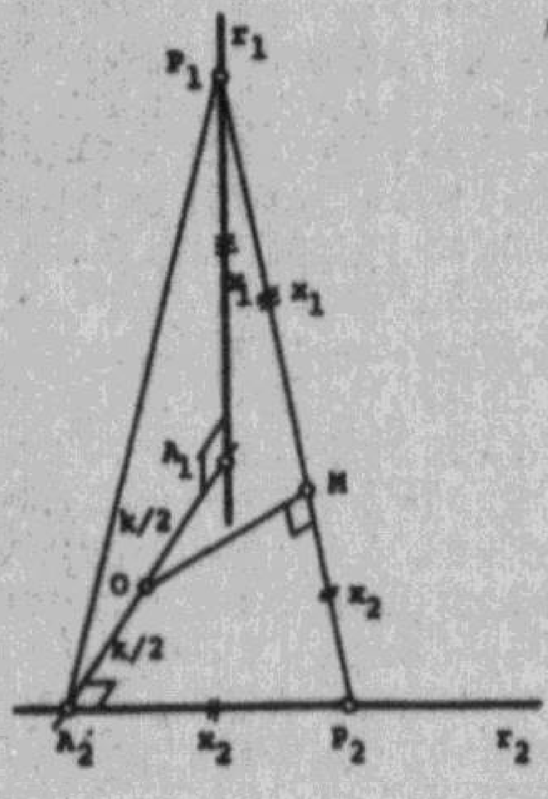
$\overline{OC} = 2\sqrt{32 - 18\sqrt{3}}$

7a. QUESTÃO
ITEM A (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Considere duas RETAS REVERSAS ORTOGONAIS, r_1 e r_2. A_1 é um ponto de r_1, A_2 é um ponto de r_2, $\overline{A_1A_2} = k$ é perpendicular comum a r_1 e r_2. Seja (e) a esfera de diâmetro $\overline{A_1A_2}$ e t uma reta tangente a (e) em um ponto M variável de (e), com a condição de t encontrar r_1 em P_1 e r_2 em P_2. Sendo $\overline{A_1P_1} = x_1$, e, $\overline{A_2P_2} = x_2$, calcule o produto x_1x_2 em função de k.

SOLUÇÃO



(i) $\Delta P_1A_1A_2$:

$$\overline{P_1A_2}^2 = x_1^2 + k^2$$

(ii) $\Delta P_1P_2A_2$:

$$(x_1+x_2)^2 = \overline{P_1A_2}^2 + x_2^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + k^2 + x_2^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x_1x_2 = \frac{k^2}{2}.$$

RESPOSTA:

$$x_1x_2 = \frac{k^2}{2}$$

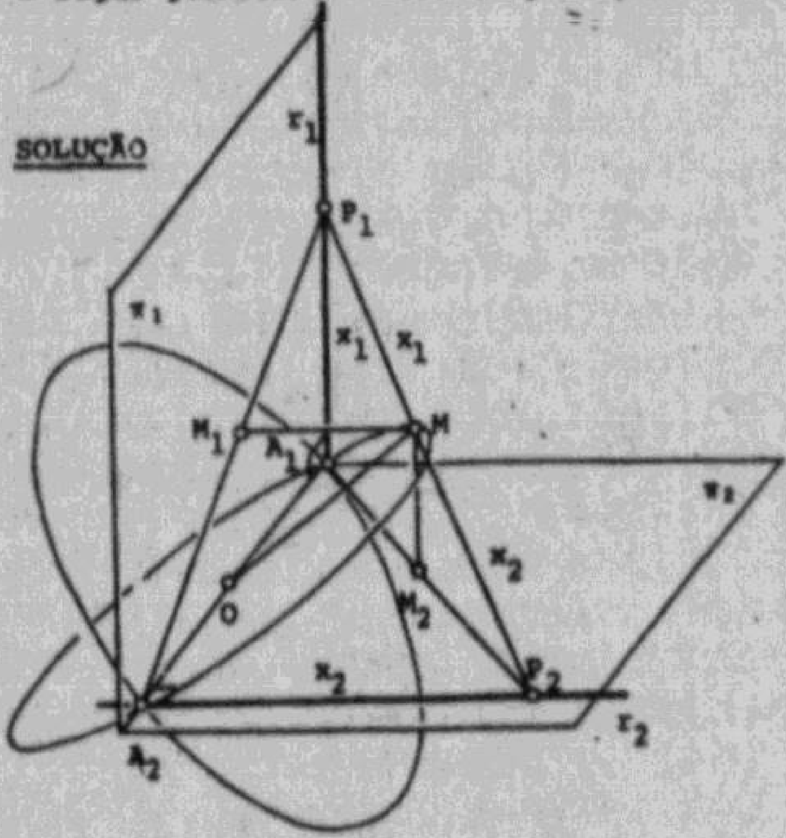
7a. QUESTÃO

ITEM B (0,75 pontos)

ENUNCIADO:

Considere duas RETAS REVERSAS ORTOGONAIS, r_1 e r_2. A_1 é um ponto de r_1, A_2 é um ponto de r_2, $\overline{A_1A_2} = k$ é perpendicular comum a r_1 e r_2. Seja (e) a esfera de diâmetro $\overline{A_1A_2}$ e t uma reta tangente a (e) em um ponto M variável de (e), com a condição de t encontrar r_1 em P_1 e r_2 em P_2. π_1 é o plano que contém r_1 e A_2. π_2 é o plano que contém r_2 e A_1. Calcule as distâncias de M aos planos π_1 e π_2, em função de $\overline{A_1P_1} = x_1$ e $\overline{A_2P_2} = x_2$, especificando o lugar geométrico descrito pelo ponto M.

SOLUÇÃO



(i) $\Delta P_1MM_1 \sim \Delta P_1P_2A_2$:

$$\frac{MM_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_1+x_2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{MM_1 = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}}$$

(ii) $\Delta P_2MM_2 \sim \Delta P_2P_1A_1$

$$\frac{MM_2}{x_1} = \frac{x_2}{x_1+x_2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{MM_2 = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}}$$

(iii) Lugar Geométrico

Como $MM_1 = MM_2$ concluímos que o lugar do ponto $\underline{M}$ é o conjunto formado pelas duas circunferências, interseções da esfera (e) com os planos bissetores dos diedros formados por π_1 e π_2, exceto os pontos A_1 e A_2.

RESPOSTA:

$$MM_1 = MM_2 = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$$

8a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,25 pontos)

ENUNCIADO:

Considere,

$$E = \left[\text{sen}\,\frac{1\pi n}{N}\right]^2 + \left[\text{sen}\,\frac{2\pi n}{N}\right]^2 + \ldots + \left[\text{sen}\,\frac{N\pi n}{N}\right]^2 = \sum_{k=1}^{N}\left[\text{sen}\,\frac{k\pi n}{N}\right]^2$$

N e n são números inteiros, tais que $0 < n < N$. Calcule E em função de N.

SOLUÇÃO

(i) De $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, fazendo $a = \frac{n\pi}{N}$ segue-se

$$E = \sum_{k=1}^{N} \frac{1 - \cos 2ka}{2} = \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \cos 2ka = \frac{N}{2} - \frac{1}{2}E'.$$

(ii) E' é uma soma de cossenos de arcos em PA; seja r a razão:

$$\begin{cases} \frac{r}{2} = a = \frac{n\pi}{N} \\ n < N \end{cases} \longrightarrow \text{sen}\,\frac{r}{2} \neq 0. \text{ Logo}$$

$$E' = \frac{\cos\frac{2a + 2Na}{2} \cdot \text{sen}\,N\frac{r}{2}}{\text{sen}\,\frac{r}{2}}.$$

(iii) Como $\frac{Nr}{2} = Na = \pi n$, segue-se $E' = 0$.

Finalmente $\boxed{E = N/2}$.

RESPOSTA:

$$E = \frac{N}{2}$$