MINISTÉRIO DO EXÉRCITO

DEP — DPET

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

CICLO BÁSICO

1977/1978

MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
DEP — DPET
IME
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. NÃO ASSINE A PROVA.
2. Você tem 10 (dez) minutos para examinar a prova, no que diz respeito a sua montagem. Ela contém além da capa e desta Folha de Instruções, mais 14 folhas de Questões, numeradas de 1 (um) a 14(catorze), e 8 folhas para rascunho. O valor das questões está especificado nos enunciados.
3. Decorridos os 10 (dez) minutos iniciais, nenhum candidato poderá mais dirigir-se à Comissão Fiscalizadora. A interpretação das questões faz parte da resolução: em momento algum faça perguntas neste sentido.
4. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente; portanto, não será considerada qualquer solução fora do local especificado. Não serão consideradas, também, as soluçõess ou os desenvolvimentos apresentados no rascunho.
5. Utilize a caneta esferográfica fornecida pela Comissão Fiscalizadora. As figuras julgadas necessárias poderão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.
6. Não será fornecido material suplementar.
7. A prova está sob a forma de caderno. Não é permitido destacar suas folhas nem desgrampeá-lo.
8. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido.
9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Seja sucinto, evitando divagações.
10. Duração da prova: 4 horas.

B O A S O R T E

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 1

1a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Dados os arcos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, todos do primeiro quadrante, e tais que $\tan \hat{A} = 1/3$, $\tan \hat{B} = 1/5$, $\tan \hat{C} = 1/7$ e $\tan \hat{D} = 1/8$, verificar se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \pi/4$.

SOLUÇÃO

Calculando-se as tangentes de $\hat{A} + \hat{B}$ e $\hat{C} + \hat{D}$ temos:

$$\text{tg}(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{\text{tg}\hat{A} + \text{tg}\hat{B}}{1-\text{tg}\hat{A}.\text{tg}\hat{B}} \Longrightarrow \text{tg}(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{4}{7}$$

$$\text{tg}(\hat{C}+\hat{D}) = \frac{\text{tg}\hat{C} + \text{tg}\hat{D}}{1-\text{tg}\hat{C}.\text{tg}\hat{D}} \Longrightarrow \text{tg}(\hat{C}+\hat{D}) = \frac{3}{11}$$

Logo

$$\text{tg}\left[(\hat{A}+\hat{B})+(\hat{C}+\hat{D})\right] = \frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}} \Longrightarrow \text{tg}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}) = 1 \qquad (1)$$

Considerando-se que os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ pertencem ao intervalo 0 a $\pi/2$ e como suas tangentes são menores do que 1 temos:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \hat{A} < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \hat{B} < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \hat{C} < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \hat{D} < \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow 0 < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} < \pi \qquad (2)$$

De (1) e (2) temos que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \frac{\pi}{4}$

RESPOSTA:

Verifica-se a igualdade.

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 2

2a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Designa-se por (T) um triângulo ABC no qual sua altura AD é cortada ao meio no ponto H, pela altura CE.

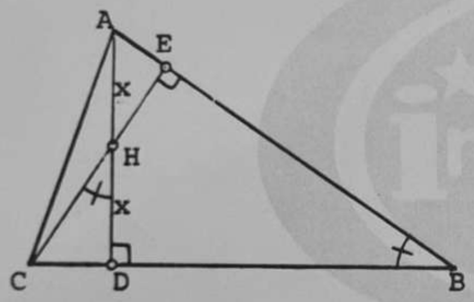
a) Demonstrar que as tangentes dos ângulos internos B e C de um triângulo (T) verificam à relação

$$\tan \hat{B} \cdot \tan \hat{C} = 2 \qquad (*)$$

b) Suposta satisfeita a relação (*), dá-se o ângulo $\hat{A}$ do triângulo (T). Calcular os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Qual a condição que deve ser satisfeita pelo ângulo $\hat{A}$ para que o triângulo (T) exista?

SOLUÇÃO

(a)



$$\Delta ACD \Longrightarrow \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{2x}{CD} \qquad (1)$$

$$\Delta CHD \Longrightarrow \operatorname{ctg} \hat{H} = \operatorname{ctg} \hat{B} = \frac{x}{CD} \qquad (2)$$

De (1) e (2) temos:

$$\operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = 2 \qquad (3)$$

(b) $\hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{C}) \Longrightarrow \operatorname{tg} \hat{A} = -\operatorname{tg}(\hat{B} + \hat{C})$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg} \hat{A} = -\frac{\operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C}}{1 - \operatorname{tg}\hat{B} \cdot \operatorname{tg}\hat{C}}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg} \hat{A} = \operatorname{tg} \hat{B} + \operatorname{tg} \hat{C} \qquad (4)$$

De (3) e (4), $\operatorname{tg} \hat{B}$ e $\operatorname{tg} \hat{C}$ devem ser as raízes reais da equação:

$$z^2 - (\operatorname{tg} \hat{A})z + 2 = 0$$

Logo $\Delta \geq 0 \Longrightarrow \operatorname{tg}^2 \hat{A} - 8 \geq 0$

$$\Longrightarrow |\operatorname{tg} \hat{A}| \geq 2\sqrt{2}$$

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 3

(Continuação da Solução da 2a Questão)

Sendo $\alpha = \text{arc tg } 2\sqrt{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então a condição pedida é:

$$0 < A \leq \alpha \qquad \text{ou} \qquad \pi - \alpha \leq A < \pi$$

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA	[signature]	Fôlha 4

3a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,5 pontos)

ENUNCIADO:

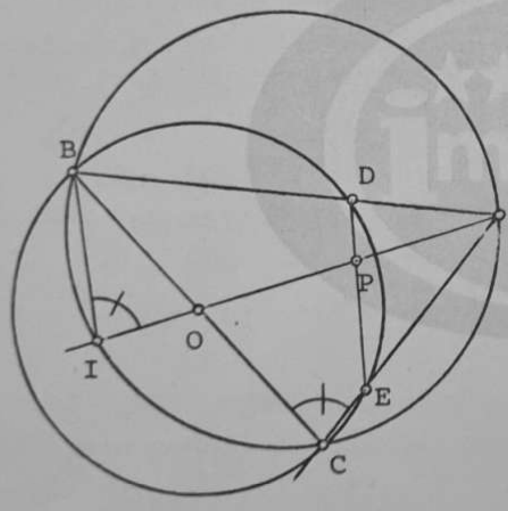
Sejam um círculo (O) de centro O, um ponto A fixo exterior a (O), e um diâmetro BC móvel.

a) Mostrar que o círculo circunscrito ao triângulo ABC passa por um ponto fixo I (I distinto de A).

b) As retas AB e AC cortam o círculo (O) nos pontos D e E respectivamente, e DE corta OA em P. Comparar os ângulos $B\hat{I}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{D}E$ e mostrar que o quadrilátero IBDP é inscritível, sendo o ponto P fixo.

OBS: Sugere-se que entre as propriedades a serem aplicadas na solução deste problema, estejam as da potência de um ponto em relação a um círculo.

SOLUÇÃO



(a) Seja I a interseção do círculo arbitrário ABC com OA.

Potência de O em relação a este círculo.

$\Rightarrow$ OI x OA = OB x OC

$\Rightarrow OI = \dfrac{R^2}{OA}$

$\Rightarrow$ I é fixo

(b) $B\hat{I}A = B\hat{C}A = 180^\circ - B\hat{D}E$ $\Longrightarrow$ IBDP é inscritível

Potência de A em relação ao círculo IBDP

$\Longrightarrow$ AP x AO = AB x AD

$\Longrightarrow$ AP é constante

$\Longrightarrow$ P é fixo

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA	Abrão Gabriel (?)	Fôlha 5

(Continuação da Solução da 3a. Questão)

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 6

4a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,5 pontos)

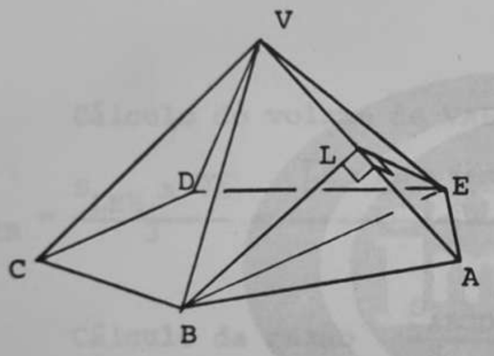
ENUNCIADO:

Dá-se um icosaedro (I) regular convexo de aresta ℓ.

a) Calcular o ângulo diedro $\hat{d}$ de (I). (Apresentar uma expressão trigonométrica, numérica, que permita calcular o valor do ângulo diedro $\hat{d}$).

b) Seja V um vértice de (I): V e os vértices de (I) adjacentes (isto é, os que são ligados a V por arestas de (I)), determinam um poliedro (P) cujas arestas são arestas do icosaedro. Calcular o volume de (P) em função de ℓ.

SOLUÇÃO

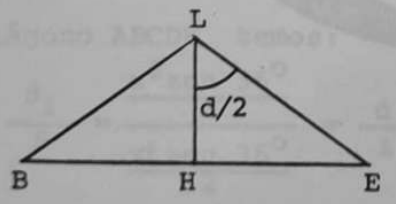


$\Delta ABV \implies \overline{BL} = \overline{LE} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\Delta ABE \implies \overline{BE} = 2.\ell.\cos 36^\circ$

Daí, no ΔBLE, temos:

$$\text{sen}\,\frac{\hat{d}}{2} = \frac{\overline{HE}}{\overline{LE}} = \frac{\cos 36^\circ}{\sqrt{3}/2}$$



como $\cos \hat{d} = 1 - 2\cdot\text{sen}^2\,\dfrac{\hat{d}}{2}$ e

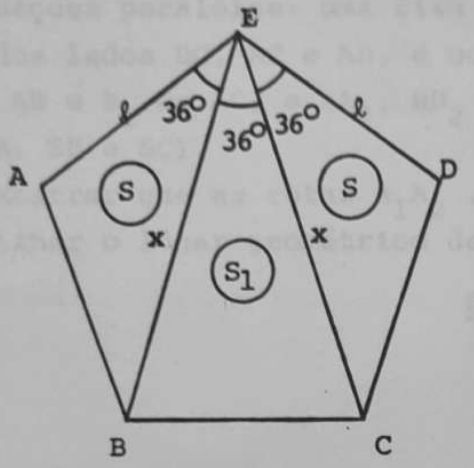
$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, vem:

$$\cos \hat{d} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 7

(Continuação da solução da 4a. Questão).

(b)



O volume da pirâmide VABCDE pode ser calculado a partir do volume de VAEB

$$\begin{cases} V_{VABCDE} = \dfrac{S_{ABCDE} \cdot h}{3} \\ V_{VAEB} = \dfrac{S_{AEB} \cdot h}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{V_{VABCDE}}{V_{VAEB}} = \frac{S_{ABCDE}}{S_{AEB}} \qquad (1)$$

Cálculo do volume de VAEB

$$V_{VAEB} = \frac{S_{LEB} \times \overline{VA}}{3} = \frac{\dfrac{\overline{LE} \times \overline{LB} \times \operatorname{sen} \hat{d} \cdot \overline{VA}}{2}}{3} \Longrightarrow V_{VAEB} = \frac{\ell^3}{12} \qquad (2)$$

Cálculo da razão $\dfrac{S_{ABCDE}}{S_{AEB}}$

Do pentágono ABCDE temos:

$$\frac{S_{BEC}}{S_{AEB}} = \frac{S_1}{S} = \frac{\dfrac{x^2 \operatorname{sen} 36^o}{2}}{\dfrac{x\ell \operatorname{sen} 36^o}{2}} = \frac{d}{\ell} = 2 \cos 36^o \Longrightarrow \frac{S_1}{S} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{AEB}} = \frac{2S + S_1}{S} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \qquad (3)$$

Cálculo do volume

de (1), (2) e (3) temos

$$V_{VABCDE} = \frac{5 + \sqrt{5}}{24} \ell^3$$

RESPOSTA:

(a) $\hat{d} = \text{arc cos} -\sqrt{5}/3$

(b) $V = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{24} \ell^3$

IME-CEE/1977/8 | GEOMETRIA | Fôlha 8

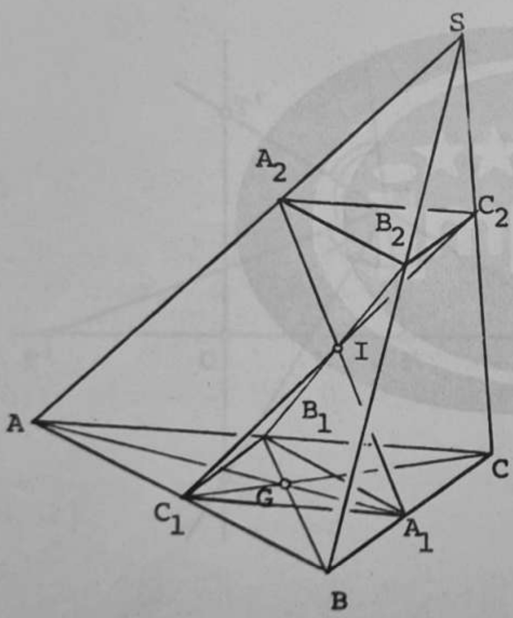
5a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 pontos)

ENUNCIADO:

Dado um triedro de vértice S, consideram-se duas seções paralelas: uma fixa ABC, com o triângulo $A_1B_1C_1$ traçado pelo meio dos lados BC, AC e AB, e outra seção móvel $A_2B_2C_2$. (A_1 é meio de BC, C_1 de AB e B_1 de AC, e AA_2, BB_2 e CC_2 estão respectivamente nas arestas SA, SB e SC).

Mostrar que as retas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 passam por um mesmo ponto e determinar o lugar geométrico desse ponto.

SOLUÇÃO



O ΔABC é homotético do $\Delta A_2B_2C_2$ de centro S.

O $\Delta A_1B_1C_1$ é homotético do ΔABC de centro G (baricentro de ABC) e razão $-1/2$.

Logo o $\Delta A_1B_1C_1$ é homotético do $\Delta A_2B_2C_2$ e em consequência A_1A_2, B_1B_2 e C_1C_2 são concorrentes num ponto I, colinear com S e G.

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 9

6a. QUESTÃO
· ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

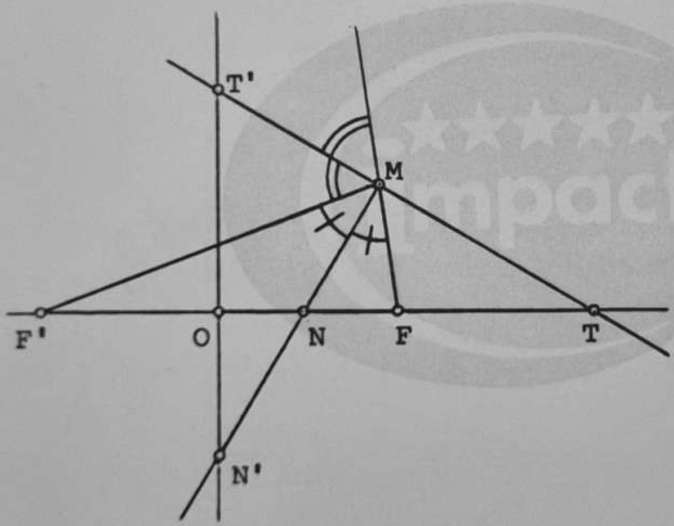
ENUNCIADO:

A tangente e a normal em um ponto M de uma elipse cortam o eixo focal respectivamente em T e N, sendo os focos F e F'.

a) Mostre que o segmento FF' é dividido harmonicamente por T e N, bem como a razão das distâncias de F aos pontos N e M é igual à excentricidade da elipse.

b) Se a tangente e a normal citadas cortam o eixo não focal em T' e N' respectivamente, mostre que o círculo MT'N' passa pelos focos F e F'.

SOLUÇÃO



(a) Δ MFF':

$$\left.\begin{array}{l} MT = \beta_{I_M} \\ MN = \beta_{E_M} \end{array}\right| \Longrightarrow \text{N e T são conjugados harmônicos de F e F'}$$

$$\frac{NF}{NF'} = \frac{MF}{MF'} \Longrightarrow \frac{NF}{2c - NF} = \frac{MF}{2a - MF} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{NF}{2c} = \frac{MF}{2a} \Longrightarrow \frac{NF}{MF} = \frac{c}{a}$$

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 10

(Continuação da Solução da 6a. Questão)

(b)

T'N' é mediatriz de FF' MN' bissetriz interna do $\Delta MFF'$ MT' bissetriz externa do $\Delta MFF'$	$\Longrightarrow$	N' e T' pertencem ao círculo circunscrito $\Delta MFF'$.

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA		Fôlha 11

7a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,5 pontos)

ENUNCIADO:

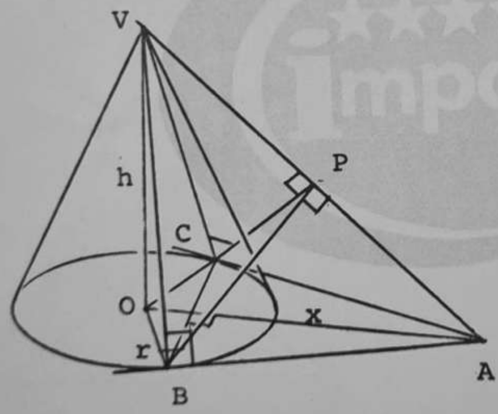
Considere um cone de revolução de vértice V, altura h, tendo por base um círculo de centro O e raio r.

No plano da base desse cone toma-se um ponto A, à uma distância x do ponto O (x > r). Pelo segmento VA traçam-se dois planos tangentes contendo as geratrizes do cone VB e VC (B e C são pontos das geratrizes, e pertencem ao plano da base).

a) Calcule em função de x, de h e de r o comprimento BC, e as distâncias dos pontos B e C ao segmento VA.

b) Determine x de modo que o ângulo dos dois planos VAB e VAC seja reto. Qual a condição para que este problema tenha solução?

SOLUÇÃO



$VB = \sqrt{h^2 + r^2}$

$AB = \sqrt{x^2 - r^2}$

$VA = \sqrt{h^2 + x^2}$

a) Δ OAB: $r \cdot \sqrt{x^2 - r^2} = x \cdot \frac{BC}{2} \Longrightarrow BC = \frac{2r}{x}\sqrt{x^2 - r^2}$

Δ VAB: $BP = \frac{VC \cdot AB}{VA} = \frac{\sqrt{h^2+r^2}\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{h^2+x^2}}$

b) Δ PBC: $B\hat{P}C = 90^0 \Longrightarrow BP = BC/\sqrt{2}$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{h^2+r^2}\cancel{\sqrt{x^2-r^2}}}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}\,x}\cancel{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{h^2+r^2}{h^2+x^2} = \frac{2r^2}{x^2}$$

IME-CEE/1977/8	GEOMETRIA	[signature]	Fôlha 12

(Continuação da solução da 7a. Questão).

$$\Longrightarrow \quad \frac{2r^2}{x^2} = \frac{h^2 - r^2}{h^2} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}.r.h}{\sqrt{h^2-r^2}} \quad \text{e} \quad h > r$$

IME-CEE/1977/8 GEOMETRIA — Fôlha 13

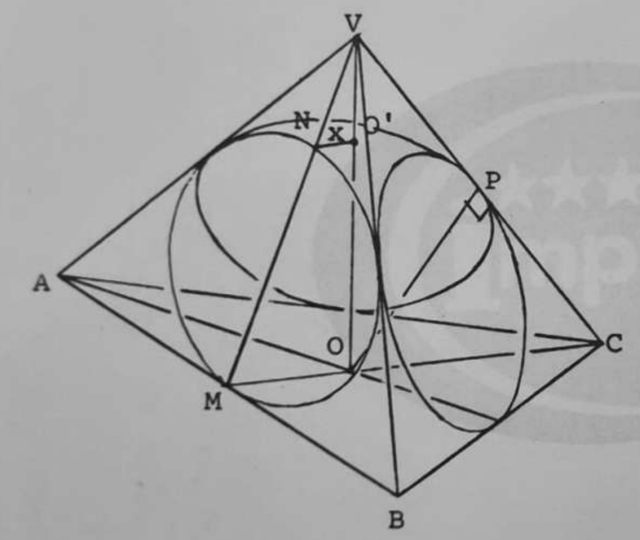
8a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,5 pontos)

ENUNCIADO:

Dá-se uma semi-esfera cuja base é um círculo (C) de raio r. Corta-se a semi-esfera por um plano π paralelo a base, o qual determina sobre a semi-esfera um círculo (C_1) de raio x.

Estabeleça a relação entre x e r para tornar possível traçar sobre a semi-esfera, três círculos tangentes aos círculos (C) e (C_1) e também tangentes entre si dois a dois.

SOLUÇÃO



ΔVOC:

$OP = r \;,\quad OP \perp VC$

ΔOPC:

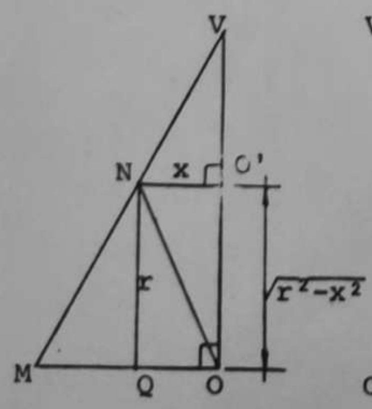
$OM = r \Longrightarrow OC = 2r$

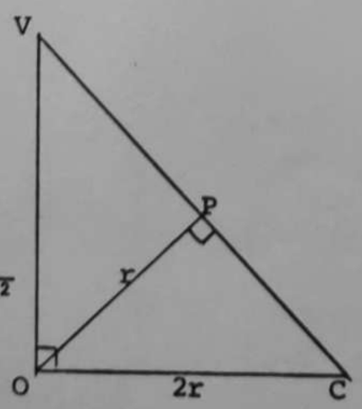
$OP = r$

$\Rightarrow O\hat{C}P = 30^\circ$

$\Rightarrow OV = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$

$\Delta MOV \sim \Delta MQN$





$\Rightarrow \dfrac{OV}{OM} = \dfrac{QN}{QM}$

$\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{r^2-x^2}}{r-x}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \sqrt{\dfrac{r+x}{r-x}}$

$\Rightarrow \dfrac{r+x}{r-x} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{r}{7}$

IME-CEE/1977	GEOMETRIA		Fôlha 14

(Continuação da solução da 8a. Questão).

RESPOSTA:

$$x = \frac{r}{7}$$