1ª. QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Dados os arcos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, todos do primeiro quadrante, e tais que $\tan \hat{A} = 1/3$, $\tan \hat{B} = 1/5$, $\tan \hat{C} = 1/7$ e $\tan \hat{D} = 1/8$, verificar se $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \pi/4$.

SOLUÇÃO

Temos $$\tan (A + B) = \frac{1/3 + 1/5}{1 - 1/3.5} = \frac{5 + 3}{14} = \frac{4}{7}$$

$$\tan (C + D) = \frac{1/7 + 1/8}{1 - 1/7.8} = \frac{8 + 7}{55} = \frac{3}{11}$$

$$\tan (A+B+C+D) = \frac{4/7 + 3/11}{1 - 3.4/11.7} = \frac{44 + 21}{77 - 12} = \frac{65}{65} = 1$$

Como $A, B, C, D < \pi/4$ cada um (são do primeiro octante)

$$A + B + C + D < 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

logo $A + B + C + D$ é do 1º ou 2º quadrante, e como

$\tan (A + B + C + D) > 0$ é do 1º quadrante, daí se conclui que:

$$A + B + C + D = \frac{\pi}{4}$$

2ª. QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Designa-se por (T) um triângulo ABC no qual sua altura AD é cortada ao meio no ponto H, pela altura CE.

a) Demonstrar que as tangentes dos ângulos internos B e C de um triângulo (T) verificam à relação

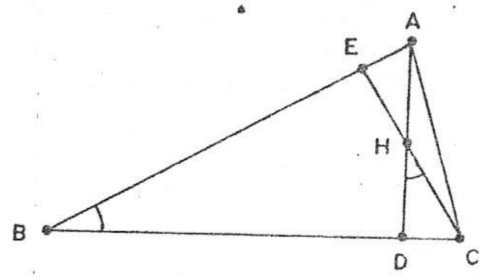
$$\tan \hat{B} \, . \, \tan \hat{C} = 2 \qquad (*)$$

b) Suposta satisfeita a relação (*), dá-se o ângulo $\hat{A}$ do triângulo (T).

Calcular os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Qual a condição que deve ser satisfeita pelo ângulo $\hat{A}$ para que o triângulo (T) exista?

SOLUÇÃO

a) $D\hat{H}C = \hat{B}$ (lado perpendicular)



$$\tan \hat{B} = \frac{DC}{DH} = \frac{2DC}{AD}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AD}{DC}$$

$$\tan \hat{B} \cdot \tan \hat{C} = \frac{2DC}{AD} \cdot \frac{AD}{BC} = 2$$

b) $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \; . \; . \; . \; \tan(\hat{B} + \hat{C}) = - \tan \hat{A}$

$$\frac{\tan \hat{B} + \tan \hat{C}}{\tan \hat{B} \cdot \tan\hat{C} - 1} = \tan \hat{A} \; . \; . \; . \; \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{SOMA} \ldots & \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \\ \text{PRODUTO} \ldots & \tan \hat{B} \cdot \tan \hat{C} = 2 \end{array}\right\} \; x^2 - \tan \hat{A} \cdot x + 2 = 0$$

$$x_1 = \tan \hat{B}$$
$$x_2 = \tan \hat{C}$$

RAIZES REAIS . . . $\tan^2 \hat{A} - 8 \geq 0$ ou $\tan \hat{A} \geq 2\sqrt{2}$

Discussão: A $\tan \hat{A}$ não pode ser negativa, sem o que $\tan \hat{B}$ ou $\tan \hat{C}$ também o seja, e teríamos dois (2) ângulos obtusos no triângulo, o que é impossível.

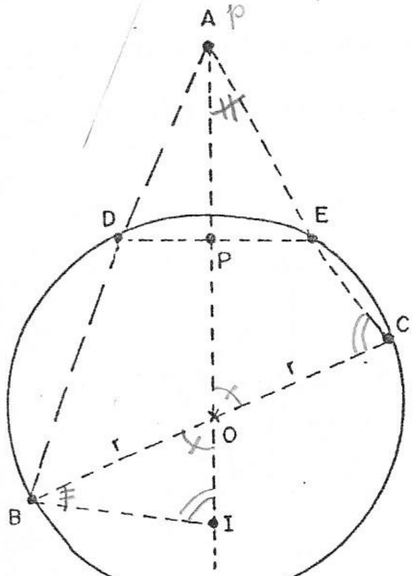
3ª. QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1,5)

ENUNCIADO: Sejam um círculo (O) de centro O, um ponto A fixo exterior a (O), e um diâmetro BC móvel.

a) Mostrar que o círculo circunscrito ao triângulo ABC passa por um ponto fixo I (I distinto de A).

b) As retas AB e AC cortam o círculo (O) nos pontos D e E respectivamente, e DE corta OA em P. Comparar os ângulos $B\hat{I}A$, $B\hat{C}A$ e $B\hat{D}E$ e mostrar que o quadrilátero IBDP é inscritível, sendo o ponto P fixo.

OBS.: Sugere-se que entre as propriedades a serem aplicadas na solução deste problema, estejam as da potência de um ponto em relação a um círculo.



SOLUÇÃO

a) A potência de O em relação ao círculo (ABC) é $OB.OC = -r^2$

Se AO reencontra (ABC) em I, temos também:

$$OA.OI = -r^2 \Rightarrow OI = -\frac{r^2}{OA} = \text{constante}$$

como OI pertence à reta fixa OA, e está sobre o prolongamento de OA além de O, concluímos que I é um ponto fixo.

b) Os triângulos BIO e OCA são semelhantes pois os ângulos em O são iguais (opostos pelo vértice) e os lados proporcionais

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OI}{OC} \quad (\text{porque } OB.OC = OA.OI = -r^2)$$

Logo $B\hat{I}O = B\hat{C}A$, mas $B\hat{C}A$ é suplementar de $B\hat{D}E$ (pois B,C,D,E pertencem a ~~ABC~~. (O).

Portanto $B\hat{I}O$ e $B\hat{D}E$ são suplementares. Ora, eles são ângulos opostos do quadrilátero IBDP, logo ele é inscritível; consideremos a potência de A em relação ao círculo (IBDP). Tal potência é dada por AP.AI = AD.AB. Mas AD.AB é a potência de A em relação a (O), logo é constante. Por conseguinte, AP.AI = constante e como AI é também constante, concluímos que AP o é: isto significa que P é fixo.

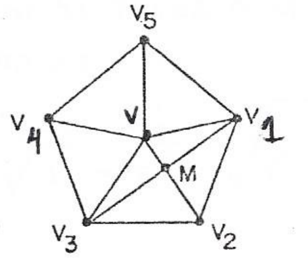
4ª. QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1,0)

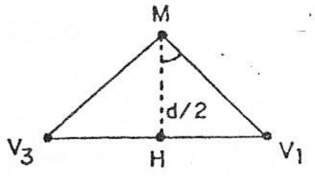
ENUNCIADO: Dá-se um icosaedro (I) regular convexo de aresta ℓ.

Calcular o ângulo diedro $\hat{d}$ de (I). (Apresentar uma expressão trigonométrica, numérica, que permita calcular o valor do ângulo diedro $\hat{d}$).

Seja V um vértice de (I): V e os vértices de (I) adjacentes (isto é, os que são ligados a V por arestas de (I)), determinam um poliedro (P) cujas arestas são arestas do icosaedro. Calcular o volume de (P) em função de ℓ.

SOLUÇÃO





a) Consideremos no icosaedro um vértice V e os adjacentes do ponto médio M da aresta V_1V_2, tracemos as perpendiculares à mesma situadas nas faces VV_1V_2 e VV_2V_3.

O ângulo $V_1\hat{M}V_3 = d$

Seja o triângulo isósceles V_1MV_3. A altura MH é mediana e bissetriz e

$$\text{sen } d/2 = \frac{V_1V_3/2}{MV_1}$$

Ora, a aresta ℓ é lado do pentágono regular $V_1V_2V_3V_4V_5$ e V_1V_3 é lado do pentágono estrelado correspondente: sendo r o raio do círculo circunscrito a ambos

$$\ell_5 = \ell \qquad \ell_5^* = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad ; \quad \ell_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

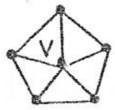
$$\text{sen } \frac{d}{2} = \frac{HV_1}{MV_1} = \frac{1/2\ \ell_5^*}{MV_1}$$

MV_1 é a altura de um triângulo equilátero de lado $\ell = \ell_5$

ou $MV_1 = \dfrac{\ell_5}{2}\cdot\sqrt{3} = \dfrac{r}{4}\sqrt{30-6\sqrt{5}}$

$$\operatorname{sen}\frac{d}{2} = \frac{{}^{1}/_{2}\ {}^{r}/_{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{{}^{r}/_{4}\ \sqrt{30-6\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{3(\sqrt{5}-1)}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$$

b) O volume do poliedro (P) (que é uma pirâmide pentagonal regular)



$$V = \frac{1}{3}\,Sh$$

Cálculo de S: $S = p_5 a_5$ onde p_5 é semi-perímetro do pentágono base e a_5 o apótema do mesmo pentágono

$$S = \frac{5}{2}\,\ell \cdot \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1) = \frac{5\ell^2(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

Obs: Existe uma fórmula direta

$$s = \frac{\ell^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$ é claro são equivalentes

Cálculo de h: Temos o triângulo retângulo formado pelos catetos $\underline{h}$ e $\underline{r}$ e hipotenusa ℓ:

$$h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{\ell^2 - \frac{4\ell^2}{10-2\sqrt{5}}} = \ell\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \ell\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

Substituindo

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{\ell^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\;\ell\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\ell^3}{12}(5+2\sqrt{5})$$

5ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1)

ENUNCIADO: Dado um triedro de vértice S, consideram-se duas seções paralelas: uma fixa ABC, com o triângulo $A_1B_1C_1$ traçado pelo meio dos lados BC, AC e AB, e outra seção móvel $A_2B_2C_2$. (A_1 é meio de BC, C_1 de AB e B_1 de AC, e AA_2, BB_2 e CC_2 estão respectivamente nas arestas SA, SB e SC).

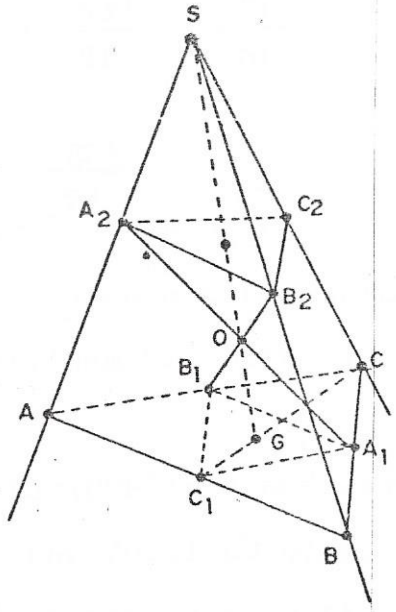
Mostrar que as retas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 passam por um mesmo ponto e determinar o lugar geométrico desse ponto.

SOLUÇÃO

As seções ABC e $A_2B_2C_2$ são homotéticas em relação a S pois

$\frac{SA}{SA_2} = \frac{SC}{SC_2} = \frac{SB}{SB_2}$;

$A_2C_2 \parallel AC$; $B_2C_2 \parallel BC$ e $A_2B_2 \parallel AB$



Os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são homotéticos em relação a G, centro de gravidade do triângulo ABC ($\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, logo $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{2}$)

Ora, duas figuras homotéticas de uma terceira são homotéticas entre si; isso prova que as retas A_1A_2, B_1B_2 e C_1C_2 concorrem no centro de homotetia O.

Em outras palavras: Como os $\triangle ABC$, $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$ são homotético[s] dois a dois, os três centros de homotetia estão em linha reta, SGO. Co[mo] S e G são fixos, o ponto O pertence a reta SG que é o seu lugar geométri[-]co.

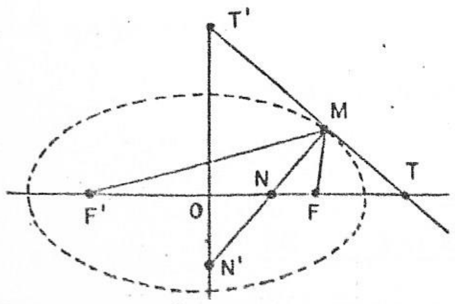
6ª QUESTÃO | ITEM: ÚNICO | (VALOR: 1)

ENUNCIADO: A tangente e a normal em um ponto M de uma elipse cortam o eixo focal respectivamente em T e N, sendo os focos F e F'.

a) Mostre que o segmento FF' é dividido harmonicamente por T e N, bem como a razão das distâncias de F aos pontos N e M é igual à excentricidade da elipse.

b) Se a tangente e a normal citadas cortam o eixo não focal em T' e N' respectivamente, mostre que o círculo MT'N' passa pelos focos F e F'.

SOLUÇÃO



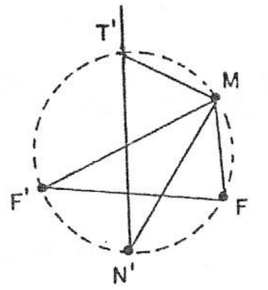
a) A tangente e a nominal à elipse em M são respectivamente, bissetrizes externa e interna do ângulo $F\hat{M}F$, do triângulo FMF'

Temos as propriedades das bissetrizes

$$\frac{NF'}{NF} = \frac{MF'}{MF} \quad e \quad \frac{TF'}{TF} = \frac{MF'}{MF}$$

$$\text{logo,} \quad \frac{NF'}{NF} = \frac{TF'}{TF}$$

ou seja, os pontos N e T dividem interna e externamente o segmento FF' na mesma razão ou, em outras palavras, N e T dividem FF' harmonicamente.



b) Seja o círculo (MFF'): a mediatriz de FF' é o eixo não focal da elipse: passa pelo ponto médio do arco FF': a normal à elipse, bissetriz de $\widehat{FMF'}$, também passa pelo ponto médio de FF': logo N' pertence ao círculo (MFF').

A mediatriz de FF' é diâmetro de (MFF').

A tangente à elipse em M é perpendicular à normal, logo passa pela outra extremidade do diâmetro isto é, T' pertence ao círculo (MFF').

7ª QUESTÃO ITEM: ÚNICO (VALOR: 1,5)

ENUNCIADO: Considere um cone de revolução de vértice V, altura h, tendo por base um círculo de centro O e raio r.

No plano da base desse cone toma-se um ponto A, à uma distância x do ponto O $(x > r)$. Pelo segmento VA traçam-se dois planos tangentes contendo as geratrizes do cone VB e VC (B e C são pontos das geratrizes, e pertencem ao plano da base).

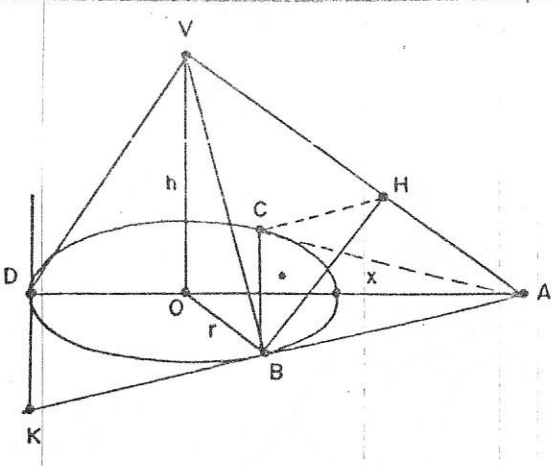
a) Calcule em função de x, de h e de r o comprimento BC, e as distâncias dos pontos B e C ao segmento VA.

b) Determine x de modo que o ângulo dos dois planos VAB e VAC seja reto.

Qual a condição para que este problema tenha solução?

a) $\Delta OBA \ldots \dfrac{BC}{2} = \dfrac{r\sqrt{x^2 - r^2}}{x}$

$$BC = \frac{2r}{x}\sqrt{x^2 - r^2}$$



$$\triangle ABV \ldots BH = \frac{VB \cdot BA}{VA}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + r^2} \cdot \sqrt{x^2 - r^2}}{\sqrt{h^2 + x^2}} \quad ; \quad CH = BH$$

b) $BC^2 = BH^2 + HC^2 = 2BH^2 \ldots$ resulta $x^2 = \dfrac{2r^2h^2}{h^2 - r^2}$

$h \geqslant r \ldots h = r$ — A estará no infinito, $VA \parallel OA$ e as duas geratrizes VB e VC estarão no mesmo plano de VO e farão um ângulo de 90^o entre si.

8ª QUESTÃO — ITEM: ÚNICO — (VALOR: 1,5)

ENUNCIADO: Dá-se uma semi-esfera cuja base é um círculo (C) de raio r. Corta-se a semi-esfera por um plano π paralelo a base, o qual determina sobre a semi-esfera um círculo (C_1) de raio x.

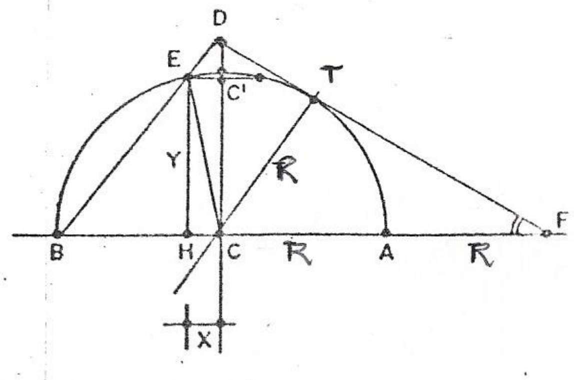
Estabeleça a relação entre x e r para tornar possível traçar sobre a semi-esfera, três círculos tangentes aos círculos (C) e (C_1) e também tangente entre si dois a dois.

SOLUÇÃO

$$CB = r = CF \cdot \frac{1}{2}$$

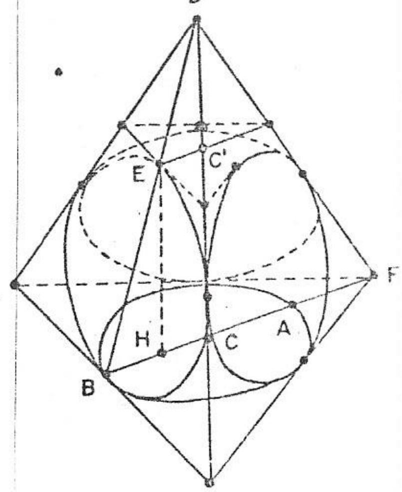
$$\left.\begin{matrix} CF = 2r \\ CT = r \end{matrix}\right\} \; D\hat{F}C = 30^o$$

$$\frac{CD}{CF} = \tan 30^o \Rightarrow CD = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$



$\Delta CEC' \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

$$BEH \sim BDC \Rightarrow \frac{y}{r-x} = \frac{\frac{2r}{\sqrt{3}}}{r}$$



$$\ldots\ x^2 + \frac{4}{3}(x^2 - 2rx + r^2) = r^2$$

$$7x^2 - 8rx + r^2 = 0 \ \ldots\ x_1 = r \ \ldots\ C$$

$$x_2 = \frac{r}{7} \ \ldots\ C'$$

RESPOSTA: $x = \frac{r}{7}$