1a. QUESTÃO | ITEM 1 | VALOR : 0,8

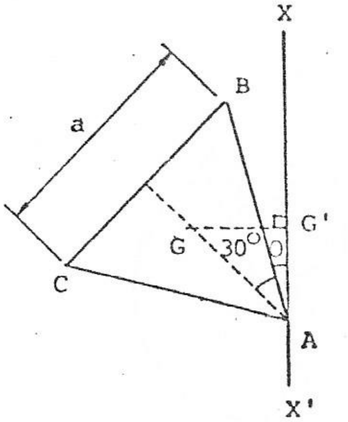
Um triângulo equilátero ABC, de lado a, gira em torno de um eixo XX' de seu plano, passando por A sem atravessar o triângulo. Sendo S a área total da superfície gerada pelo triângulo e designando por θ, o ângulo $X\widehat{A}B$ pede-se determinar os valores de θ para que :

a) S seja máximo

b) S seja mínimo

c) $S = 3\pi a^2$

Descreva o sólido obtido em cada um dos três casos.



SOLUÇÃO Pappus - Guddin

$S = 2\pi\ 2p\ GG'$ (distância do G ao eixo)

$\Delta AGG'$:

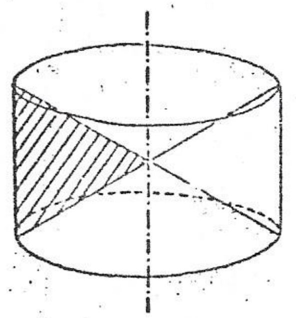
$AG = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow GG' = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ),\ 0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$

$S = 2\pi \cdot 3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) =$

$= 2\pi a^2\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ)$.

a) S máximo $\Longrightarrow \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) = 1 \Longrightarrow$

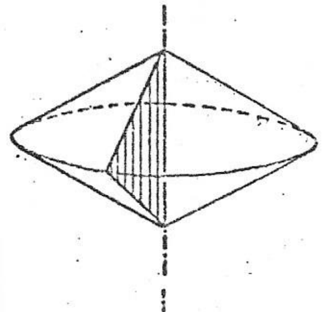
$\Longrightarrow \boxed{\theta = 60^\circ.}$



b) S mínimo $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ)$ mínimo $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{\theta = 0^\circ \text{ ou } \theta = 120^\circ}$

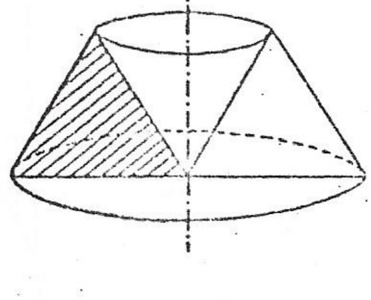


c) $S = 3\pi a^2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 3\pi a^2 = 2\pi a^2\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$

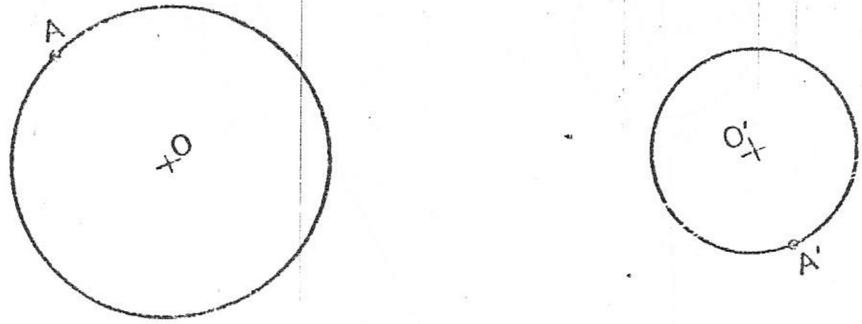
$\Longrightarrow \boxed{\theta = 30^\circ \text{ ou } \theta = 90^\circ.}$



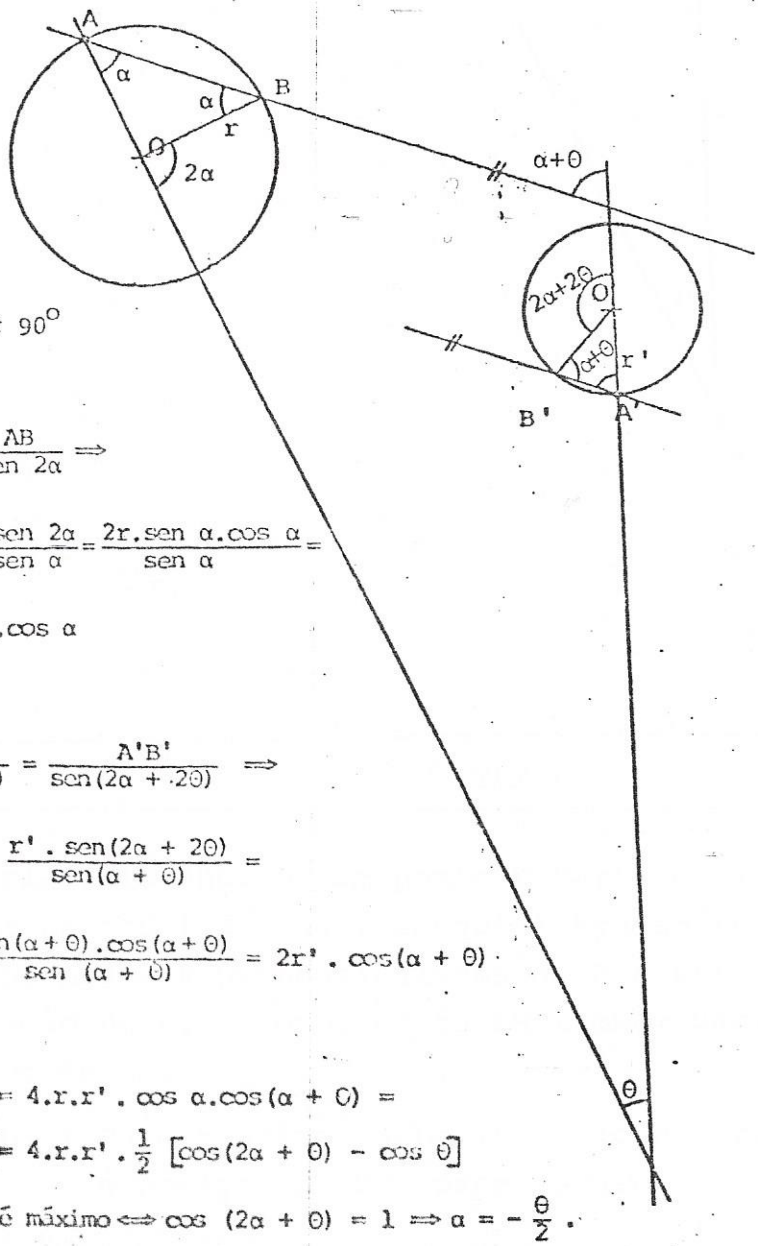
2a. QUESTÃO | ITEM A | VALOR : 0,8

São dados dois círculos C(O,r) e C' (O',r'), um ponto fixo A sobre C e um ponto fixo A' sobre C'. Traçam-se cordas paralelas AB e A'B' nos círculos C e C', respectivamente.

Determine a direção destas cordas para que o produto AB.A'B' seja máximo.



SOLUÇÃO



$-90^\circ < \alpha < 90^\circ$

ΔAOB:

$$\frac{r}{\text{sen }\alpha} = \frac{AB}{\text{sen }2\alpha} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow AB = \frac{r.\text{sen }2\alpha}{\text{sen }\alpha} = \frac{2r.\text{sen }\alpha.\cos\alpha}{\text{sen }\alpha} =$$

$$= 2r.\cos\alpha$$

$\Delta A'O'B'$:

$$\frac{r'}{\text{sen}(\alpha+\theta)} = \frac{A'B'}{\text{sen}(2\alpha+2\theta)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A'B' = \frac{r'.\text{sen}(2\alpha+2\theta)}{\text{sen}(\alpha+\theta)} =$$

$$= 2r'.\frac{\text{sen}(\alpha+\theta).\cos(\alpha+\theta)}{\text{sen}(\alpha+\theta)} = 2r'.\cos(\alpha+\theta)$$

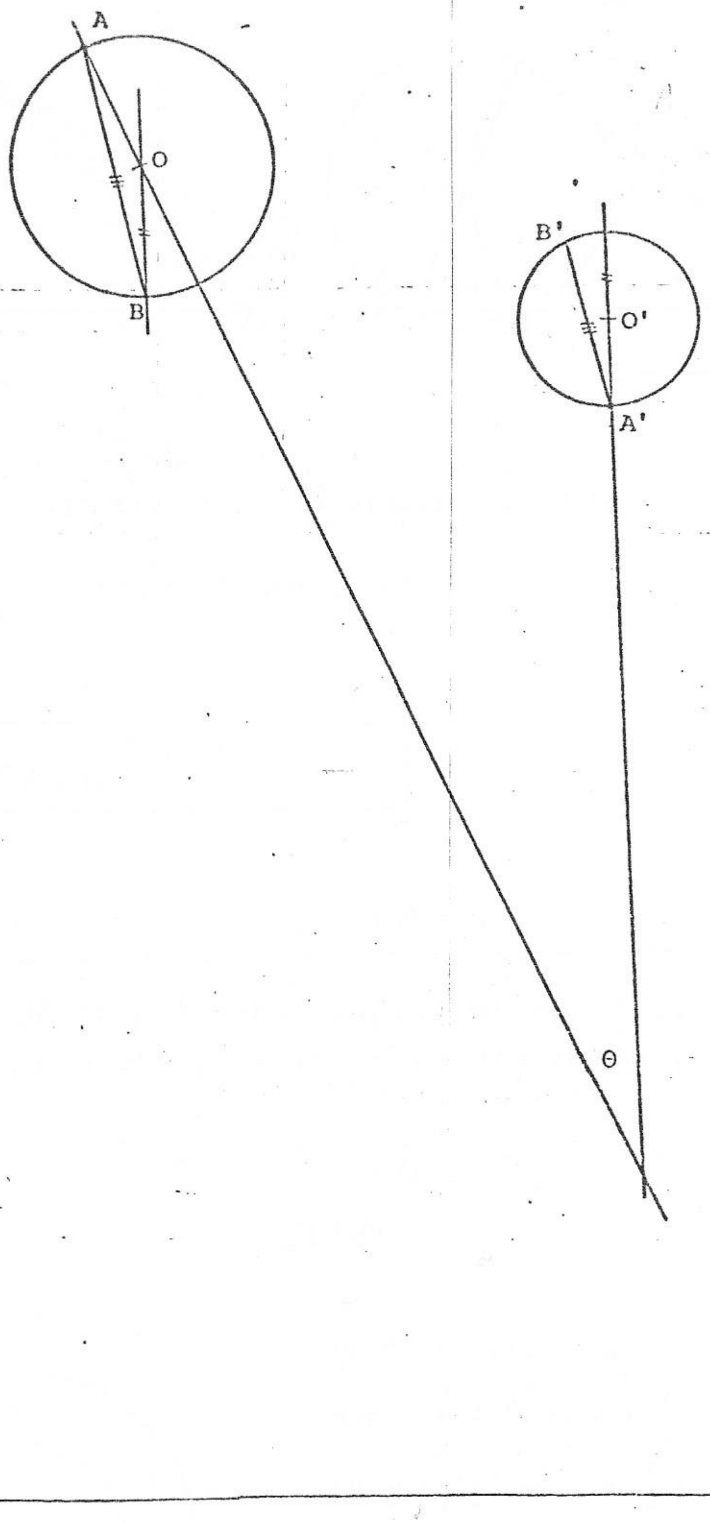
Então:

$$AB.A'B' = 4.r.r'.\cos\alpha.\cos(\alpha+\theta) =$$

$$= 4.r.r'.\frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha+\theta) - \cos\theta\right]$$

$AB.A'B'$ é máximo $\Longleftrightarrow \cos(2\alpha+\theta) = 1 \Longrightarrow \alpha = -\frac{\theta}{2}$.

CONSTRUÇÃO

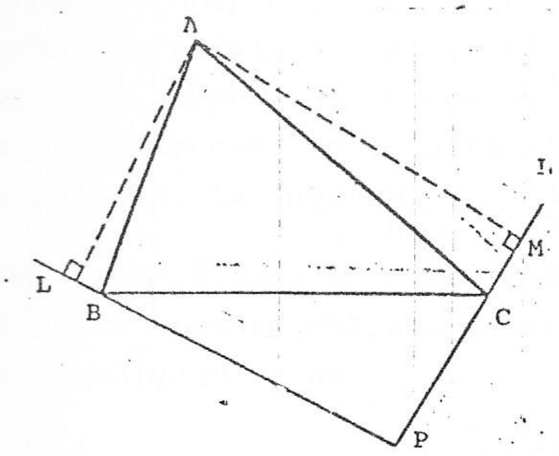


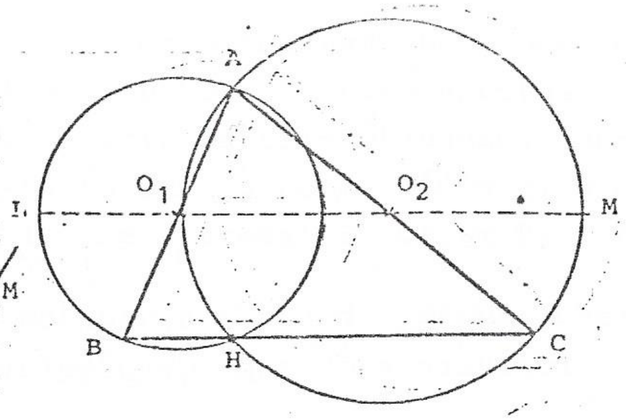
2a.QUESTÃO ITEM B VALOR : 0,6

Dá-se um triângulo ABC. De um ponto P variável (e não pertencente às retas suportes dos lados do triângulo) traçam-se retas PB e PC. Sejam L e M os pés das perpendiculares de A a estas retas.
Com a variação de P, o comprimento LM também varia. Qual o comprimento máximo de LM?

(OBSERVAÇÃO) : Para resolver este item não é necessário determinar à posição de P, correspondente a este máximo de LM).

SOLUÇÃO





L e M descrevem, respectivamente, os círculos de diâmetros AB e AC (exceto A e H)

LM é máximo quando a reta passa por O_1 e O_2.

Nesse caso:

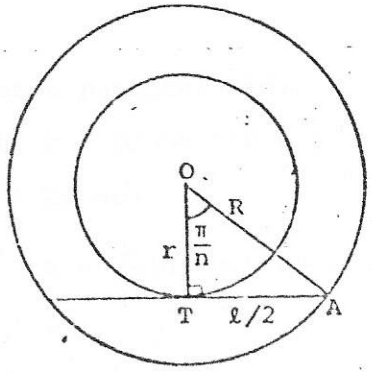
$$\left.\begin{aligned} LO_1 &= \frac{AB}{2} \\ O_1O_2 &= \frac{BC}{2} \\ O_2M &= \frac{AC}{2} \end{aligned}\right| \Longrightarrow \boxed{LM_{\text{máximo}} = \frac{AB + BC + AC}{2}.}$$

3a. QUESTÃO | ITEM 3 | VALOR : 0,5

Sejam ℓ o lado de um polígono regular de n lados, r e R, respectivamente, os raios dos círculos inscrito e circunscrito a este polígono.

Prove que $\quad r + R = \frac{\ell}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n}$

SOLUÇÃO



Do triângulo OTA:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{\ell/2}{R} \Longrightarrow R = \frac{\ell}{2} \csc \frac{\pi}{n}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{\ell/2}{r} \Longrightarrow r = \frac{\ell}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$$

logo:

$$r + R = \frac{\ell}{2}\left(\csc \frac{\pi}{n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{\ell}{2} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}\right) =$$

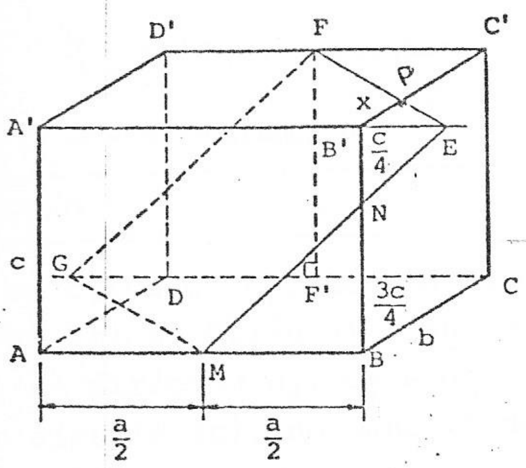
$$= \frac{\ell}{2}\left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \pi/2n}{2\operatorname{tg} \pi/2n} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \pi/2n}{2\operatorname{tg} \pi/2n}\right) =$$

$$= \frac{\ell}{2} \cdot \frac{2}{2\operatorname{tg} \pi/2n} \Longrightarrow \boxed{r + R = \frac{\ell}{2} . \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}}$$

4a. QUESTÃO | ITEM 4 | VALOR : 0,8

Um paralelepípedo tem a base ABCD sobre um plano horizontal e as arestas verticais são AA', BB', CC' e DD'. As três arestas concorrentes AB=a, AD=b e AA'=c formam um triedro tri-retângulo, sendo a>b>c. Um plano secante corta a aresta AB em seu ponto médio M, a aresta BB' no ponto N, tal que $\frac{NB'}{NB} = \frac{1}{3}$ e a aresta B' C' em P, tal que B'P=x, com $0 < x < b$. Pede-se estudar a forma das seções obtidas pelo plano secante MNP no paralelepípedo, quando a distância x varia nas condições dadas.

SOLUÇÃO



FG//MN

MG//EF

$\Delta NB'E \sim \Delta NBM \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{B'E}{a/2} = \frac{c/4}{3\ c/4} \Longrightarrow B'E = \frac{a}{6}.$$

$\Delta PC'F \sim \Delta PB'E \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{C'F}{a/6} = \frac{b-x}{x} \Longrightarrow C'F = \frac{a}{6x}(b-x)$$

$\Delta FF'G \sim \Delta NBM \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{F'G}{a/2} = \frac{c}{3\ c/4} \Longrightarrow F'G = \frac{2a}{3}$$

Então $CG = CF' + F'G =$

$$= \frac{a}{6x}(b-x) + \frac{2a}{3}$$

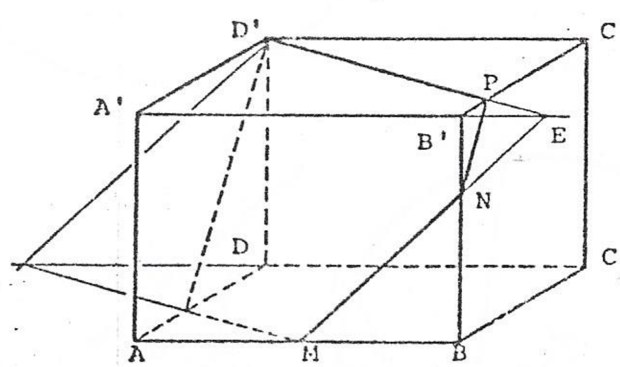
$$\boxed{CG = \frac{a}{6x}(b-x) + \frac{2a}{3}}$$

Casos particulares:

i) $F \equiv D' \iff C'F = a$

Então:

$$a = \frac{a}{6x}(b-x) \Longrightarrow x = \frac{b}{7}$$

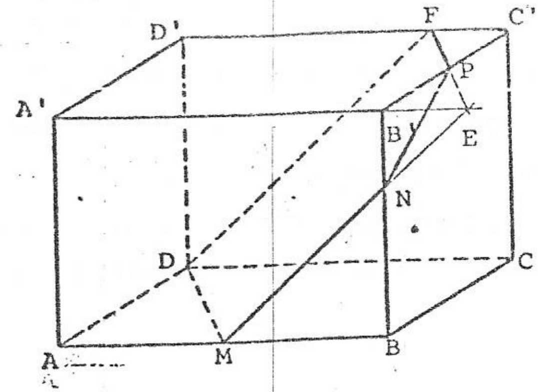


ii) $G \equiv D \Longleftrightarrow CG = a$

Então:

$$a = \frac{a}{6x}(b - x) + \frac{2a}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{b}{3}$$



Forma da seção:

$0 < x \leq \frac{b}{7} \Longrightarrow$ pentágono

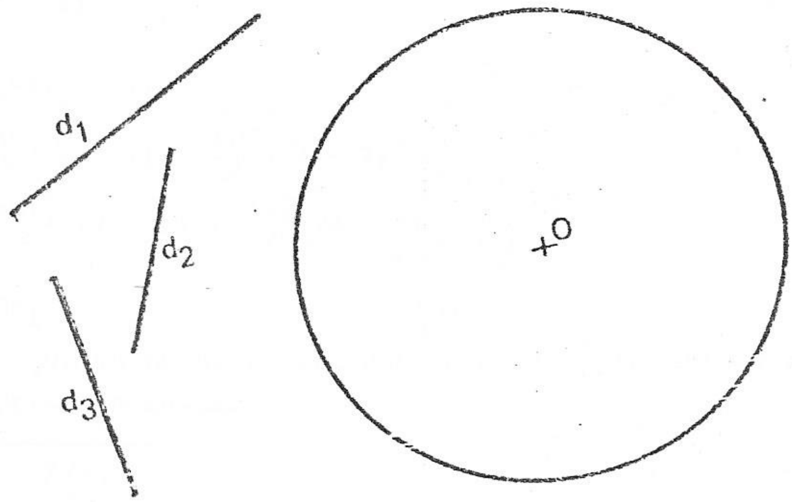
$\frac{b}{7} < x < \frac{b}{3} \Longrightarrow$ hexágono

$\frac{b}{3} \leq x < b \Longrightarrow$ pentágono

$x = b \Longrightarrow$ trapézio

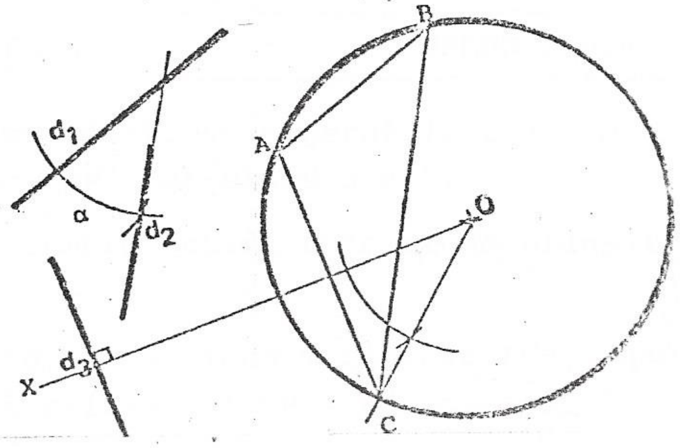
5a. QUESTÃO — ITEM 5 — VALOR : 0,6

Dá-se um círculo (c), de centro O e três direções d_1, d_2 e d_3. Inscreva em (c) os triângulos cujos lados AB, BC e CA têm, respectivamente, as direções d_1, d_2 e d_3 e cujos vértices A, B, e C se sucedem no círculo (c), no sentido do movimento dos ponteiros do relógio



SOLUÇÃO

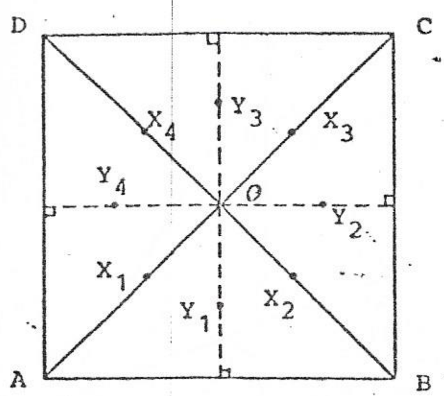
Traça-se $OX \perp d_3$ e marca-se o ângulo central $X\hat{O}C = \alpha$, determinando o ponto C. Finalmente, $CA // d_3$ e $AB // d_1$.

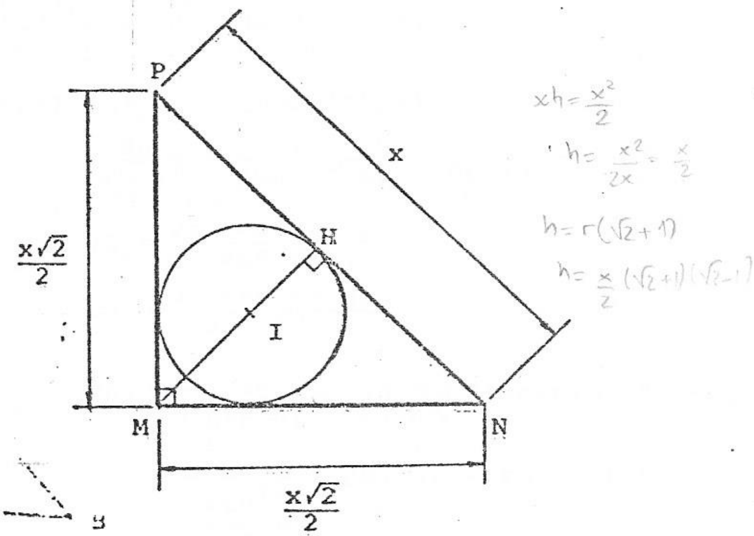


6a QUESTÃO — ITEM 1 — VALOR : 0,6

Dá-se um quadrado de vértices A, B, C e D e seu centro O. Mostre que os incentros dos triângulos, cujos vértices são cada 3 pontos não colineares deste conjunto de 5 pontos, são vértices de um polígono regular convexo e calcule, em função do lado ℓ do quadrado, o raio do círculo no qual está inscrito o polígono.

SOLUÇÃO





Considerando o círculo inscrito no triângulo retângulo de hipotenusa x, temos:

$$r = p - x = \frac{x\sqrt{2} + x}{2} - x = \frac{x}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$IH = r = \frac{x}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$IM = r\sqrt{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Delta ABD:\ OX_1 = \frac{BD}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$\Delta OAB:\ OY_1 = \frac{AB\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1) = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

Então $OX_1 = OY_1$

Como o ângulo que se obtém unindo dois pontos consecutivos a O é 45^o, fica definido um octógono regular.

$$\boxed{\text{RAIO} = OX_1 = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1)}$$

7a QUESTÃO — ITEM A — VALOR : 0,8

São dados um cone de revolução de vértice V, cuja geratriz faz com o eixo do cone um ângulo β e uma elipse de semi-eixos a e b.

1º) Mostre que esta elipse pode ser sempre obtida como seção plana do cone dado.

2º) Sendo AB o traço do plano secante com o plano meridiano AVB, que lhe é perpendicular, demonstre a relação $VA.VB = b^2 \operatorname{cosec}^2\beta$.

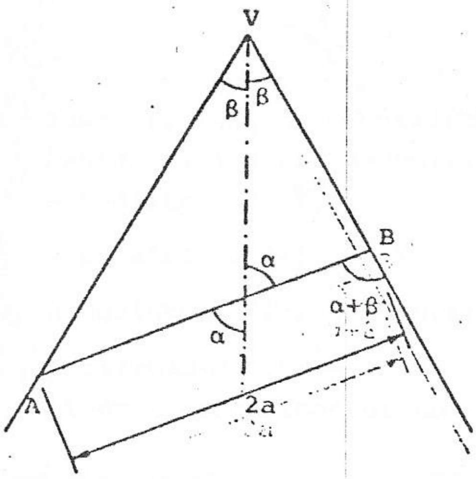
SOLUÇÃO

1º) Dados $\underline{a}$ e $\underline{b}$, fica definida a excentricidade da elipse $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

Assim, fica definido o ângulo (α) entre o plano que secciona o cone e a geratriz deste segundo a elipse desejada:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\cos\beta.$$

No plano meridiano do cone AVB obtém-se então o traço do plano seção fazendo com o eixo um ângulo $\underline{\alpha}$ e tal que $AB = \underline{2a}$.



2º) LEI DOS SENOS (ΔABV)

$$\frac{2a}{\text{sen } 2\beta} = \frac{VA}{\text{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{VB}{\text{sen}(\alpha-\beta)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow VA = \frac{2a\ \text{sen}(\alpha+\beta)}{\text{sen } 2\beta}$$

$$VB = \frac{2a\ \text{sen}(\alpha-\beta)}{\text{sen } 2\beta}$$

$$\Longrightarrow VA.VB = \frac{4a^2}{\text{sen}^2 2\beta}.\text{sen}(\alpha+\beta).\text{sen}(\alpha-\beta) =$$

$$= \frac{2a^2}{\text{sen}^2 2\beta}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) =$$

$$= \frac{2a^2}{\text{sen}^2 2\beta}(2\cos^2\beta - \cancel{1} - 2\cos^2\alpha + \cancel{1}) =$$

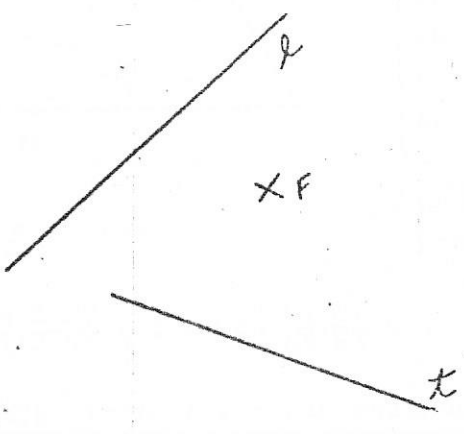
$$= \frac{\cancel{2}a^2}{\cancel{4}\,\text{sen}^2\beta.\cancel{\cos^2\beta}}.\cancel{2}\,\cancel{\cos^2\beta}(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{VA.VB = b^2.\text{cossec}^2\beta}$$

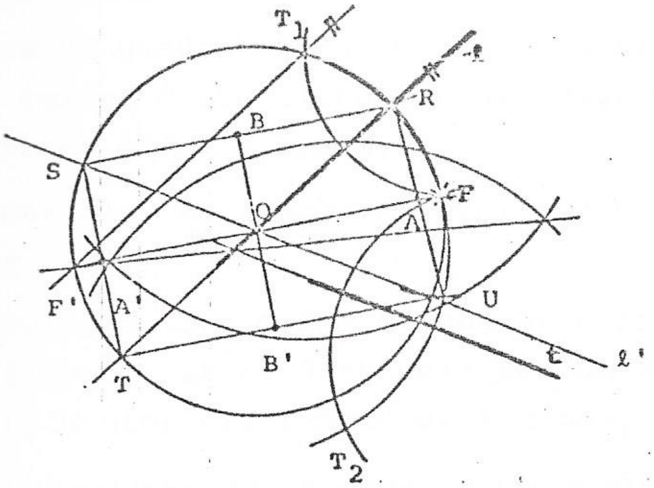
7a QUESTÃO	ITEM B	VALOR 0,6

Em uma hipérbole (h) são dados: um foco F, uma assíntota (ℓ) e uma tangente (t).

Pede-se determinar gratificamente o outro foco, a outra assíntota e os comprimentos dos eixos, justificando a construção executada.



SOLUÇÃO

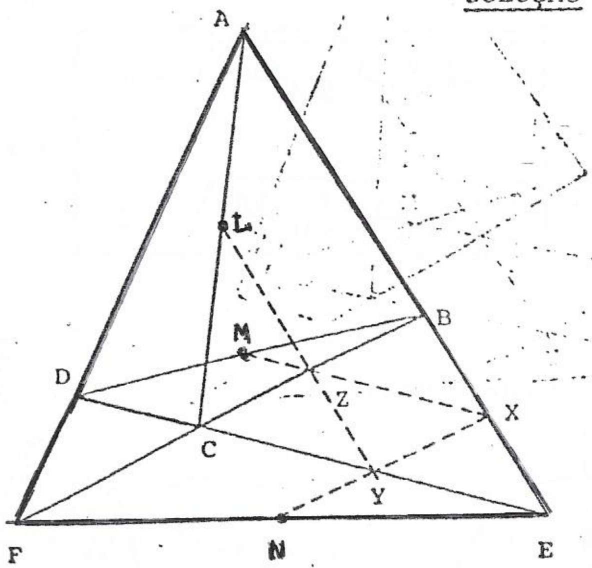


1) Sendo T_1 e T_2 os simétricos de F com relação a (ℓ) e (t) respectivamente, os lugares geométricos de F' são:
   - mediatriz de $\overline{T_1T_2}$
   - paralela a (ℓ) por T_1.
2) A assíntota (ℓ') é simétrica de (ℓ) com relação a FF'.
3) O círculo de diâmetro FF' intercepta as assíntotas em R,S,T,U, que definem os comprimentos dos eixos AA' e BB'.

8a. QUESTÃO | ITEM A | VALOR : 0,8

Seja ABCD um quadrilátero convexo tal que os dois pares de lados opostos não são paralelos; AB encontra CD em E e AD encontra BC em F. Sejam L,M e N os pontos médios dos segmentos AC, BD e EF, respectivamente. Prove que L,M e N são colineares.

SOLUÇÃO



TEOREMA DE MENELAUS:

ΔBEC e SECANTE ADF

$$\frac{AB}{AE}\cdot\frac{DE}{DC}\cdot\frac{FC}{FB}=1$$

DAS BASES MÉDIAS VEM:

$$\begin{cases} AB = 2\ LZ \\ DE = 2\ MX \\ FC = 2\ NY \\ AE = 2\ LY \\ DC = 2\ MZ \\ FB = 2\ NX \end{cases}$$

Onde X, Y e Z são, respectivamente, pontos médios de BE, CE e BC.

Assim: $\frac{2\ LZ}{2\ LY}\cdot\frac{2\ MX}{2\ MZ}\cdot\frac{2\ NY}{2\ NX} = 1 \Longrightarrow \frac{LZ}{LY}\cdot\frac{MX}{MZ}\cdot\frac{NY}{NX} = 1$

Por Menelaus (ΔXYZ) $\Longrightarrow$ L, M e N são colineares. → secante LMN.

8a. QUESTÃO | ITEM B | VALOR : 0,6

Dá-se um quadrilátero convexo inscritível em um círculo, cujos lados são cordas deste círculo e de comprimentos a , b , c e d que se sucedem na ordem a,b,c,d.

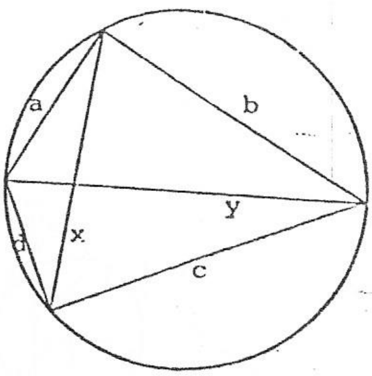
1) Calcule, em função de a,b,c, d os comprimentos das diagonais x e y .

2) Permutando a ordem de sucessão das cordas, deduza, com auxílio de figuras, se as diagonais dos novos quadriláteros obtidos têm comprimentos diferentes de x e de y.

3) Sabendo-se que a área de um quadrilátero inscritível é

$S = \sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}$ e supondo que o quadrilátero, além de inscritível também é circunscritível, mostre que a fórmula de sua área reduz-se a $S = \sqrt{abcd}$.

SOLUÇÃO



1) Por Hiparco-Ptolomeu:

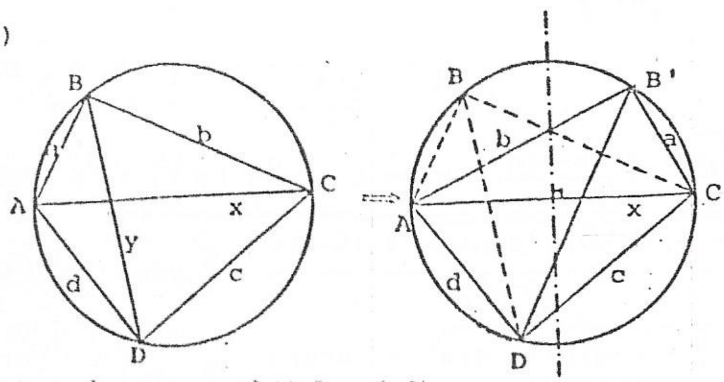
$$\begin{cases} xy = ac + bd \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{ab + cd}{ad + bc} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(ac + bd)(ab + cd)}{(ad + bc)} \\ y^2 = \dfrac{(ad + bc)(ac + bd)}{(ab + cd)} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{(ad + bc)}} \\ y &= \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{(ab + cd)}} \end{aligned}}$$

PERMUTANDO OS LADOS a e b:

2)



Da figura, temos que houve variação do comprimento da diagonal do quadrilátero já que BD ≮ B'D.

3) $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

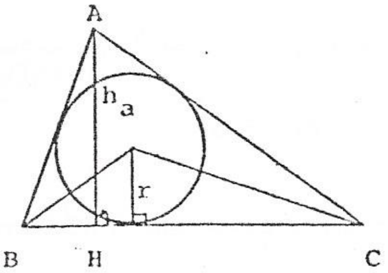
Quadrilátero circunscritível $\Leftrightarrow$ $p = a + c = b + d$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p - a = (a + c) - a = c \\ p - b = (b + d) - b = d \\ p - c = (a + c) - c = a \\ p - d = (b + d) - d = b \end{cases} \Longrightarrow \boxed{S = \sqrt{abcd}}$$

9a. QUESTÃO | ITEM 9 | VALOR : 0,8

Determine os ângulos de um triângulo, dados o perímetro $\underline{2p}$, o lado $\underline{a}$ e a altura correspondente ao lado a, $\underline{h_a}$.

SOLUÇÃO



$$2p = a + b + c \Longrightarrow b + c = 2p - a$$

$$S = \frac{1}{2}\, ah_a = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A = pr \Longrightarrow \begin{cases} bc = \dfrac{ah_a}{\operatorname{sen} A} \\ r = \dfrac{ah_a}{2p} \end{cases}$$

LEI DOS COSSENOS:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A = (b + c)^2 - 2\,bc\,\underbrace{(1 + \cos A)}_{2\cos^2 \frac{A}{2}}$$

$$\Longrightarrow a^2 = (2p-a)^2 - \cancel{4}^{\,2} \cos^{\cancel{2}} \frac{A}{2} \cdot \underbrace{\frac{ah_a}{\operatorname{sen} A}}_{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cancel{\cos \frac{A}{2}}}$$

Analogamente

$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{2p(p-b)}{b \cdot h_b}$ e $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{2p(p-c)}{c \cdot h_c}$

$$2\, ah_a . \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 4p^2 - 4ap + \cancel{a^2} - \cancel{a^2} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{2p(p-a)}{a.h_a}}$$

$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{p(p-b)}{S}$

$$S = p^2 . \operatorname{tg} \frac{A}{2} . \operatorname{tg} \frac{B}{2} . \operatorname{tg} \frac{C}{2} \Longrightarrow \operatorname{ctg} \frac{B}{2} . \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\frac{1}{2}\, ah_a} = \frac{\cancel{2}p^2 \cdot \dfrac{\cancel{ah_a}}{\cancel{2}p(p-a)}}{\cancel{ah_a}} = \frac{p}{p - a}$$

$\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p(p-c)}{S}$

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{a}{r} = \frac{\cancel{a}}{\dfrac{\cancel{a}h_a}{2p}} = \frac{2p}{h_a}$$

$$\text{logo: } x^2 - \frac{2p}{h_a}\, x + \frac{p}{p-a} = 0 \Longrightarrow x = \frac{p(p-a) \pm \sqrt{p(p-a)(p(p-a) - h_a^2)}}{h_a(p-a)}$$

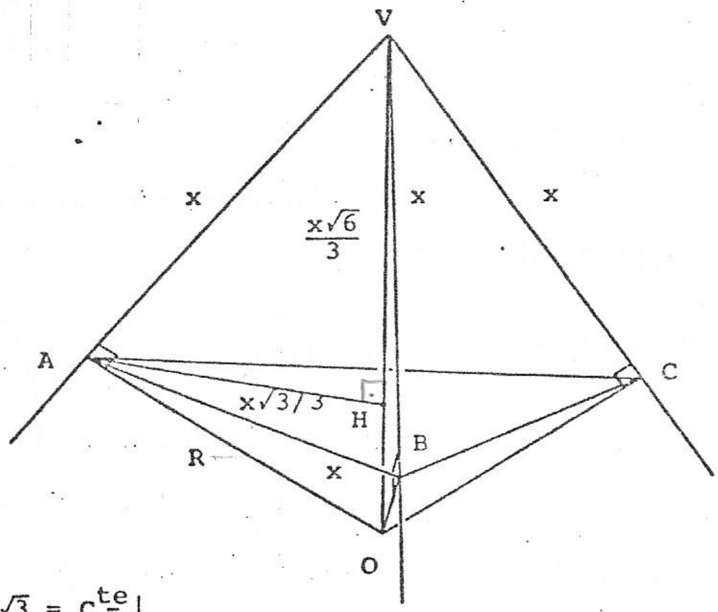
assim:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} &= \frac{p(p-a) \pm \sqrt{p(p-a)(p(p-a) - h_a^2)}}{h_a(p-a)} \\ \operatorname{ctg} \frac{C}{2} &= \frac{p(p-a) \pm \sqrt{p(p-a)(p(p-a) - h_a^2)}}{h_a(p-a)} \end{aligned}}$$

10a. QUESTÃO ITEM 10 VALOR 0,6

Determine o lugar geométrico do vértice V de um triedro cujas faces medem 60° cada e cujas arestas tangenciam uma esfera (e) dada, de raio $\underline{r}$ e centro O.

SOLUÇÃO



VA = x

$\Delta OHA \sim \Delta OVA$

$\frac{r}{x\sqrt{3}/3} = \frac{OV}{x} \Longrightarrow VO = r\sqrt{3} = C^{te}$ $\Big| \Longrightarrow$

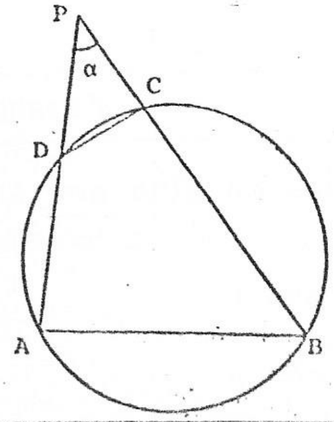
O é FIXO

$\Longrightarrow$ L.G. é uma esfera de centro O e raio $r\sqrt{3}$.

11a. QUESTÃO ITEM 11 VALOR : 0,6

Numa circunferência são dadas uma corda fixa AB, iguais ao lado do triângulo equilátero inscrito e uma corda móvel CD, de comprimento constante e igual ao lado do dodecágono regular convexo inscrito. As duas cordas são os lados opostos de um quadrilátero convexo inscrito ABCD. Determine o lugar geométrico do ponto de encontro dos outros dois lados, especificando a delimitação deste lugar.

SOLUÇÃO

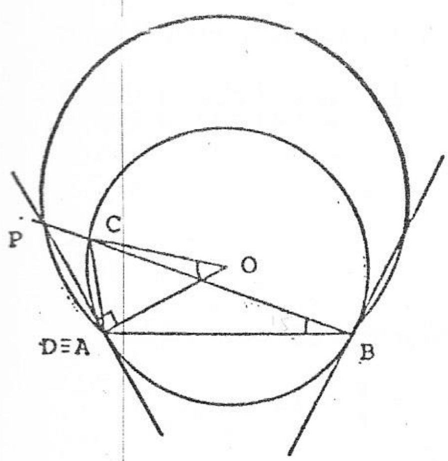


1ª Hipótese) $\widehat{CD}$ está no maior arco $\widehat{AB}$:

$$\alpha = \frac{AB - CD}{2} = \frac{120^\circ - 30^\circ}{2} = 45^\circ$$

$\Longrightarrow$ P pertence ao arco capaz de 45° sobre $\overline{AB}$.

LIMITES:



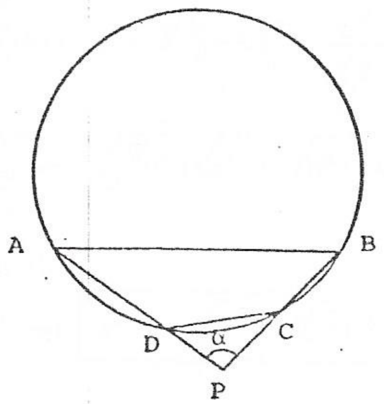
$C\hat{O}A = 30^\circ \Longrightarrow A\hat{B}P = 15^\circ$
$A\hat{P}B = 45^\circ$
$O\hat{A}B = 30^\circ$ $\Longrightarrow O\hat{A}P = 90^\circ$

O L.G. é a porção do arco capaz compreendida entre as tangentes ao círculo original em A e B.

2ª hipótese) $\widehat{CD}$ está no menor arco $\widehat{AB}$:

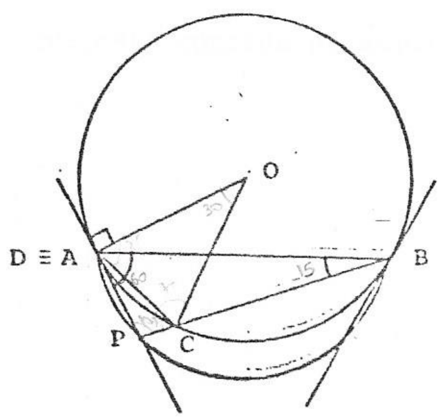
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = \frac{240^\circ - 30^\circ}{2} = 105^\circ$$

$\Longrightarrow$ P pertence ao arco capaz de 105° sobre $\overline{AB}$.



LIMITES:

$C\hat{O}A = 30^\circ \Longrightarrow A\hat{B}P = 15^\circ$
$A\hat{P}B = 105^\circ$
$O\hat{A}B = 30^\circ$ $\Longrightarrow O\hat{A}P = 90^\circ$



$\Longrightarrow$ O L.G. é a porção do arco capaz compreendida entre as tangentes ao círculo original em A e B.

12a. QUESTÃO ITEM 12 VALOR : 0,5

Obtenha uma relação entre a, b e c, eliminando x entre as duas equações abaixo :

$$a \operatorname{sen} x - b \cos x = \frac{1}{2} c \operatorname{sen} 2x$$

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \cos 2x$$

SOLUÇÃO

dividindo-se membro a membro:

$$\frac{a\ \text{sen}\ x - b\cos x}{a\cos x + b\ \text{sen}\ x} = \frac{1}{2}\ \text{tg}\ 2x \Longrightarrow \frac{a\ \text{tg}\ x - b}{a + b\,\text{tg}x} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\ \text{tg}\ x}{1-\text{tg}^2x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a\ \cancel{\text{tg}}\ x - a\ \text{tg}^3x - b + b\ \cancel{\text{tg}^2x} = a\ \cancel{\text{tg}}\ x + b\ \cancel{\text{tg}^2x}$$

$$\Longrightarrow \text{tg}^3x = -\frac{b}{a}$$

elevando-se a 1ª equação ao quadrado e dividindo-se por $\cos^2 x$:

$$(a\ \text{tg}\ x - b)^2 = \frac{1}{4}\,c^2.\sec^2x.\text{sen}^2 2x = \frac{1}{\cancel{4}}.c^2(1+\text{tg}^2x)\ .\left[\frac{\cancel{2}\ \text{tg}\ x}{1+\text{tg}^2x}\right]^2$$

$$(a\ \text{tg}\ x - b)^2 = \frac{c^2\ \text{tg}^2x}{1+\text{tg}^2x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (-a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - b)^2 = \frac{c^2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}} \Longrightarrow \left(\frac{a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}}\right)^2 = \frac{c^2\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt[3]{\cancel{a^2}b^2}\,(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^2 = \frac{c^2.\sqrt[3]{\cancel{a^2}b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{c^2 = (\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}$$

<u>OBSERVAÇÃO</u>:

se $\cos x = 0 \Longrightarrow \text{sen}\ x = \pm 1$; $\text{sen}\ 2x = 0$; $\cos 2x = -1 \Longrightarrow b = \pm c$

$a = 0$

que está contida na expressão acima.