PROVA DE GEOMETRIA e TRIGONOMETRIA

CADERNO DE QUESTÕES

Concurso de Admissão
ao
Primeiro Ano
do
Curso de Formação e Graduação

1990 - 1991

1ª Questão: Valor: 1,0

Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $\overline{OP} = 3R$

a) Determine um diâmetro $\overline{MN}$ de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.

b) Calcule em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.

c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule $\overline{PK}$.

d) O diâmetro $\overline{MN}$ gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre MN?

e) Determine a posição do diâmetro $\overline{MN}$ para que a área do triângulo PMN seja máxima.

2ª Questão: Valor: 1,0

Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

3ª Questão: Valor: 1,0

Sejam dois quadrados ABCD e ABEF, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

4ª Questão: Valor: 1,0

Q · Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que

$$\text{Sen } 2A + \text{sen } 2B + \text{sen } 2C = 4 \text{ sen } A \text{ sen } B \text{ sen } C.$$

5ª Questão: Valor: 1,0

Mostre que: Se num triângulo ABC vale a relação

$$\frac{\cos(B - C)}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}(C - B)} = \operatorname{tg} B$$

então o triângulo é retângulo com ângulo reto A.

6ª Questão: Valor: 1,0

Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio da base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:

a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices VABC, seja regular.

b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que passam pela aresta VA.

7ª Questão: Valor: 1,0

Resolver o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 6 \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} + \dfrac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = -6 \end{cases}$$

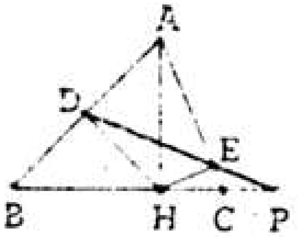
sabendo que x e y pertencem ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

8ª Questão: Valor: 1,0

Seja, sobre uma esfera, um círculo máximo (C) com diâmetro $\overline{AB} = 2R$. Traçam-se: uma corda $\overline{MN}$ do círculo (C), paralela a AB, e duas retas x e y perpendiculares ao plano do círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e passando, respectivamente, por M e N. Os planos definidos pelo ponto A e a reta x e o definido pelo ponto A e a reta y cortam a esfera segundo dois círculos. Mostre que quando MN varia, mantendo-se paralela a AB, a soma dos quadrados de seus raios é constante.

9ª Questão: Valor: 1,0

Num triângulo ABC traçamos a altura $\overline{AH}$ e do pé H dessa altura construímos as perpendiculares $\overline{HD}$, $\overline{HE}$ sobre os lados AB e AC; seja P o ponto de interseção de DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determina-se também, de modo análogo, os pontos Q e R sobre os lados CA, AB. Demonstre que os pontos P, Q, R são colineares.

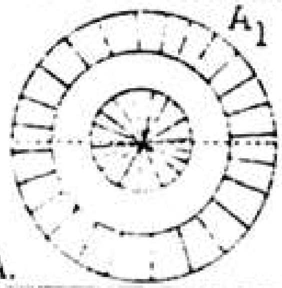


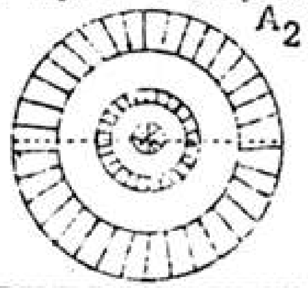
10ª Questão: Valor: 1,0

Q: No plano, considere um disco de raio R, chame este conjunto de A_0. Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R$ e $\frac{2}{3}R$, chame este conjunto de A_1. O conjunto A_1 contém um disco de raio $R_1 = \frac{1}{3}R$, divida um raio deste disco em três segmentos congruentes e, mais uma vez, retire de A_1 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R_1$ e $\frac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de A_2. Continue esse processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.

a) Calcule a área do conjunto A_n obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.

b) Calcule a área do conjunto resultante A.

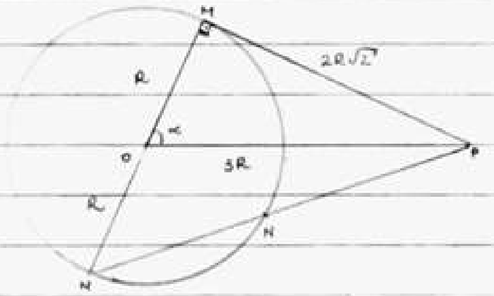




IME 1991 – Geometria e trigonometria

Algumas resoluções:

1:)



a) $O\hat{M}P = 90°$ → $M \in$ A Capaz de 90° sobre OP

M é a interseção do arco capaz com a circunf dada

MN é um dos dois diâmetros que formam com OP um ângulo α: arc cos 1/3

b) $MN = 2R$

$PM = 2R\sqrt{2}$

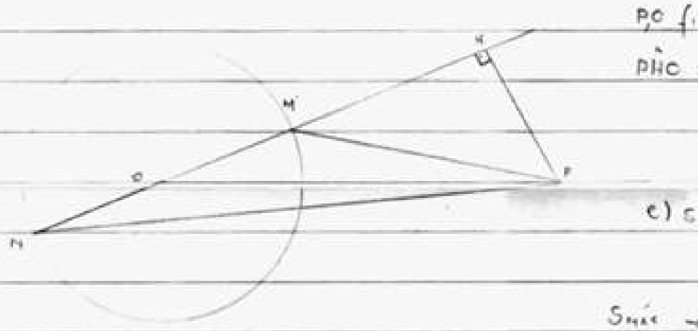
$PN = \sqrt{4R^2 + 8R^2} = 2R\sqrt{3}$

$S = \dfrac{MN \times PN}{2} = 2\sqrt{2}\,R^2$

c) Potência de P

$PM^2 = PK \times PN$ → $8R^2 = PK \cdot 2R\sqrt{3}$ → $PK = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

d)



PO fixos → $H \in$ A capaz de 90

$P\hat{H}O = 90°$ sobre PO

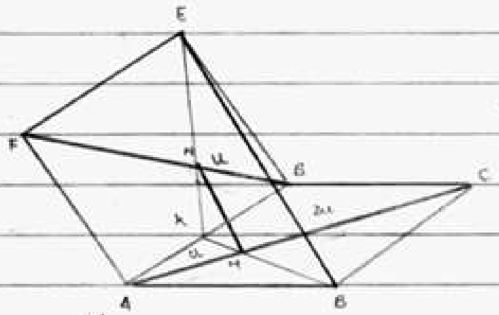
(exceto o pto P)

e) $S = \dfrac{MN \times PH}{2} = R \times PH$

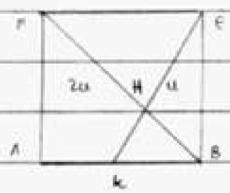
$S_{máx}$ → $PH_{máx}$ → $PH_{máx} = PC = 3R$

$S_{máx}$ qdo $MN \perp PO$

3:)



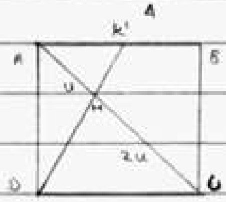
▱ ABEF



$\Delta NKB \sim \Delta NEF$

$\dfrac{NK}{NE} = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{BK}{FE} = \dfrac{1}{2}$ K é médio de AB

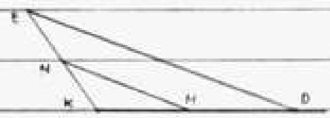
▱ ABCD



$\Delta MK'A \sim \Delta MCD$

$\dfrac{MK'}{MD} = \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{AK'}{CD} = \dfrac{1}{2}$ K' é médio de AB

ΔEKD



$\Delta KMN \sim \Delta KDE$ (LAL) ($r = 1/3$)

∴ MN // DE

5:) $\frac{\cos(B-C)}{\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen}(C-B)} = \operatorname{tg} B \qquad \frac{\cos(C-B)}{\operatorname{sen}(C+B)\cdot \operatorname{sen}(C-B)} = \operatorname{tg} B$

$\frac{\cos(C-B)}{2\operatorname{sen} C \cos B} = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B}$

$\cos C \cos B + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$

$\cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = 0$

$\cos(B+C) = 0 \rightarrow B+C = 90° \qquad A = 90$

6:) a) $\Delta ABC: \quad r = \frac{1}{3} h \rightarrow r = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad a = 2r\sqrt{3}$

$\Delta ABC: \quad h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \qquad h = 2r\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow h = 2r\sqrt{2}$

b) $V = \frac{1}{3}\left[V_{tetr} - V_{cone}\right] \qquad V_{tetr} = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3}(2r\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2r\sqrt{2} \qquad V_{tetr} = 2r^3\sqrt{6}$

$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\, 2r\sqrt{2} \rightarrow V_{cone} = 2\pi r^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore V = \frac{2r^3}{9}\left[3\sqrt{6} - \pi\sqrt{2}\right]$

7:) $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 6 \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} + \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = -6 \end{cases} \qquad \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = -6 \qquad \operatorname{tg} y = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 6 \rightarrow \operatorname{tg}^4 x - 6\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \qquad \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$

$\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{8}} = \pm\left[\sqrt{2} \pm 1\right]$

(i) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}+1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{8}, \; y = -\frac{\pi}{8}$ (ii) $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}-1 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} \quad y = -\frac{3\pi}{8}$

(iii) $\operatorname{tg} x = -\frac{3\pi}{8}, \; y = \frac{\pi}{8}$ (iv) $\operatorname{tg} x = -\frac{\pi}{8} \quad y = \frac{3\pi}{8}$

8:) $(2r_1)^2 + (2r_2)^2 = (2R)^2 \rightarrow r_1^2 + r_2^2 = R^2$