PROVA DE MATEMÁTICA

CADERNO DE QUESTÕES

Concurso de Admissão
ao
Primeiro Ano
do
Curso de Formação e Graduação

1991 - 1992

COMISSÃO DE EXAME DE ESCOLARIDADE

1991 - 1992

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DE MATEMATICA

1. Não assine ou faça qualquer sinal em sua prova que possa identificá-la. A inobservância disto poderá anulá-la.

2. Utilize caneta azul para resolução das questões. As figuras julgadas necessárias deverão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.

3. A interpretação faz parte das questões; por conseguinte são vedadas perguntas ao Grupo de Aplicação e Fiscalização.

4. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente, não sendo considerada resolução fora do local especificamente designado.

5. Você recebeu 2(dois) Cadernos : o de Questões e o de Soluções.

6. Neste Caderno constam as 10(dez) questões que constituem a Prova, cada uma no valor de 1,0(um) ponto.

7. O de Soluções é constituído por 39(trinta e nove) páginas, das quais 30(trinta) destinam-se às resoluções e 9(nove) aos rascunhos. Observe que o rascunho não será levado em conta para efeito de correção.

8. O tempo total para execução da prova é limitado a 4 (quatro) horas.

9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Observe o local correto para a resolução de cada questão. Escreva com caligrafia legível.

10. Não é permitido destacar qualquer das folhas que compõem os cadernos.

11. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido. O Caderno de Questões estará liberado após o término da Prova.

12. Lembre-se : Não deixe questão alguma em branco. Se porventura não conseguir resolver integralmente uma questão, procure mostrar conhecimento sobre o assunto, deixando indicado o encaminhamento da solução. Com isto você certamente obterá uma fração do grau atribuído à questão.

Estamos aguardando-o como nosso aluno no início do período letivo e lhe desejamos FELICIDADE nesta prova.

1ª Questão: Valor: 1,0

Prove que $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, onde Z_1, $Z_2 \in \mathbb{C}$.

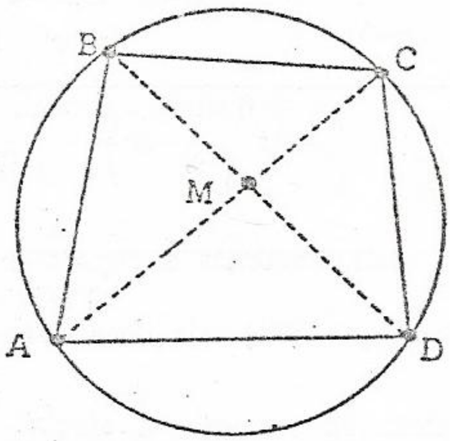
2ª Questão: Valor: 1,0

Encontre todas as soluções de:

$\sec x - 2 \cos x = 1$ em $[0, 2\pi]$

3ª Questão: Valor: 1,0

Dado o quadrilátero ABCD, inscrito num círculo de raio r, conforme a figura abaixo, prove que:



$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + CD.AD}$$

4ª Questão: Valor: 1,0

Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem, no sistema de base 7.

5ª Questão:	Valor: 1,0

Determine a equação da reta que passa por um dos vértices da curva definida por: $4y^2 + 8y - x^2 = 4$, formando um ângulo de 45^o com o eixo horizontal.

6ª Questão:	Valor: 1,0

Dados:

a) Um cone de revolução com vértice S e cuja base circular está situada num plano π.

b) Um ponto P exterior ao cone e não pertencente a π.

Pede-se: determinar, pelo ponto P, os planos tangentes ao cone.

7ª Questão:	Valor: 1,0

A partir da função $R(t) = e^{-At} + \dfrac{A}{B - A}\left(e^{-At} - e^{-Bt}\right)$, onde

t é variável (tempo) e A e B são constantes reais, encontre a expressão de R(t), para o caso em que A tende a B, de modo que R(t) seja uma função contínua.

8ª Questão: Valor: 1,0

Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que:

a) $f(0) = 0$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}, \quad \forall\, x \in (0, \infty)$

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Pede-se:

1) Os intervalos onde f é crescente (respectivamente decrescente).

2) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima (respectivamente para baixo.

3) Onde ocorrem os pontos de máximo e mínimo absolutos e de inflexão?

4) Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \; ; & x \geq 0 \\ -f(-x) \; ; & x < 0 \end{cases}$$

Esboce o gráfico de g.

9ª Questão: Valor: 1,0

Calcule o valor do determinante abaixo:

$$D_n = \begin{vmatrix} m+x & m & m & m \cdots\cdots & m \\ m & m+x & m & m \cdots\cdots & m \\ m & m & m+x & m \cdots\cdots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m \cdots\cdots & m+x \end{vmatrix}$$

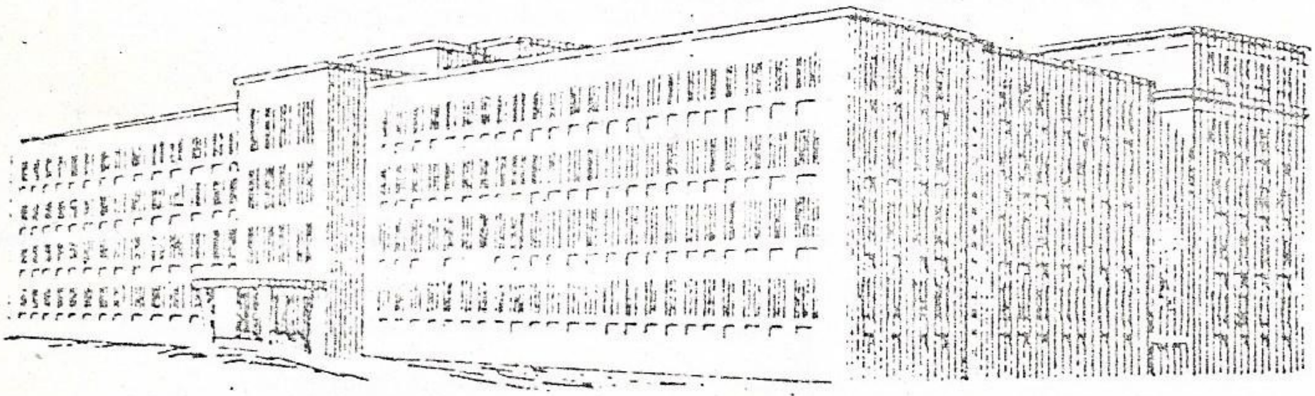
10ª Questão: Valor: 1,0

Sejam $E_0 = [0\,,\,1]$ e $f_1\,,\,f_2 : E_0 \to E_0$ funções definidas por $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ e $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Se $\mathcal{P}(E_0)$ é o conjunto das partes de E_0, seja $F : \mathcal{P}(E_0) \to \mathcal{P}(E_0)$ a função definida por $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$, onde $f_i(A)$ é a imagem de A por f_i, $i = 1\,,\,2$.

Agora, para cada $n \geqslant 1$ definimos $E_n = F(E_{n-1})$.

a) Esboce graficamente E_0, E_1, E_2 e E_3. Mostre que $E_n \subset E_{n-1}$.

b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} |E_n|$, onde $|E_n|$ é a soma dos comprimentos dos intervalos que formam E_n.



① $z_1 = a+bi \therefore z_2 = c+di \therefore z_1+z_2 = (a+c)+(b+d)i$

$\overline{z_1+z_2} = (a+c)-(b+d)i \therefore \overline{z_1} = a-bi \therefore \overline{z_2} = c-di$

$\overline{z_1}+\overline{z_2} = a-bi+c-di = a+c-(b+d)i = \overline{z_1+z_2}$ //

② $\dfrac{1}{\cos x} - 2\cos x = 1 \therefore 1-2\cos^2 x = \cos x \therefore 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4}$$

$\nearrow -1 \rightarrow x = \pi$ //

$\searrow 1/2 \rightarrow x = \pi/3$ //

$x = 5\pi/3$ //

③ $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD}$

$a = 2R\,\text{sen}\,\hat{A} \therefore S = \dfrac{bc}{2}\,\text{sen}\,\hat{A} \therefore S = \dfrac{abc}{4R}$

$(h = b\,\text{sen}\,\hat{A})$

$$\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4R} + \frac{AC\cdot AD\cdot CD}{4R} = \frac{AB\cdot AD\cdot BD}{4R} + \frac{BC\cdot BD\cdot CD}{4R}$$

$$AC(AB\cdot BC + AD\cdot CD) = BD(AB\cdot AD + BC\cdot CD)$$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB\cdot AD + BC\cdot CD}{AB\cdot BC + CD\cdot AD}$$ //

④

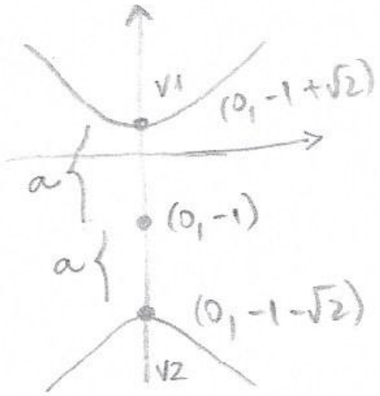
6	6	5
↓ 1 a 6 ≠0	≠1º vale 0	≠1º ≠2º vale 0

base 7 → 0 a 6

$6\cdot 6\cdot 5 = 180$ //

(5) $4y^2+8y-x^2=4 \Rightarrow 4y^2+8y+4-x^2=8 \Rightarrow 4(y^2+2y+1)-x^2=8$

$\div 8 \Rightarrow \dfrac{x^2}{-8}+\dfrac{(y+1)^2}{2}=1 \Rightarrow$ hipérbole com eixo paralelo a y



$\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2}-\dfrac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$

centro $(0,-1)$
$a=\sqrt{2}$
$b=2\sqrt{2}$
vértices $(0,-1\pm\sqrt{2})$

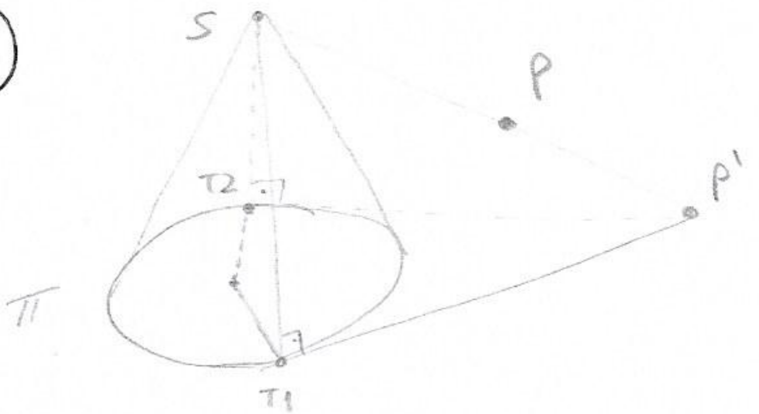
reta 45° c/ horizontal $\Rightarrow y=x+h$

reta q passa por $V_1 \Rightarrow y=x-1+\sqrt{2}$ //

reta q passa por $V_2 \Rightarrow y=x-1-\sqrt{2}$ //

---

(6)



- Prolongar SP até encontrar $P' \in \pi$
- Traçar tangentes à base do cone para encontrar T_1 e T_2
- Os planos tangentes ao cone são $SP'T_1$ e $SP'T_2$

- Se SP for paralelo a π, as tangentes serão paralelas a SP

---

(7) $\lim\limits_{A\to B} R(t) = \lim\limits_{A\to B}\left[e^{-At}+\dfrac{A}{B-A}\left(e^{-At+Bt}-1\right)e^{-Bt}\right]=$

$= e^{-Bt} + \lim\limits_{A\to B}\left[\dfrac{A}{B-A}\left(e^{(B-A)t}-1\right)e^{-Bt}\right]$

se $u\to 0$, então $e^u-1 \sim u \ln e = u$

limite $= e^{-Bt}+\lim\limits_{A\to B}\left[\dfrac{A}{\cancel{B-A}}\cdot\cancel{(B-A)}t\cdot e^{-Bt}\right]=e^{-Bt}+Bte^{-Bt}=$

$=(1+Bt)e^{-Bt}$ //

(8)

1) f crescente $\to f' > 0 \to \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} > 0 \to x^2-1 > 0 \to x^2 > 1$

$\to x > 1$ (porque $x \geq 0$)

f decrescente para $0 \leq x < 1$

2) f côncava p/ cima $\to f'' > 0$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = (uv^{-1})' = u'v^{-1} + u\cdot(-v^{-2})v' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+1)^2 - (x^2-1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x[x^2+1-2(x^2-1)]}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} > 0 \to 3-x^2 > 0 \to x^2 < 3 \to 0 < x < 3$$

f côncava p/ baixo $\to f'' < 0 \to 3 - x^2 < 0 \to x^2 > 3 \to x > \sqrt{3}$

3) máximo $\to f' = 0$ e $f'' < 0$

mínimo $\to f' = 0$ e $f'' > 0$

$f' = 0$ p/ $x^2 = 1 \to x = 1 \to f''(1) = \dfrac{2\cdot 2}{8} = \dfrac{1}{2}$

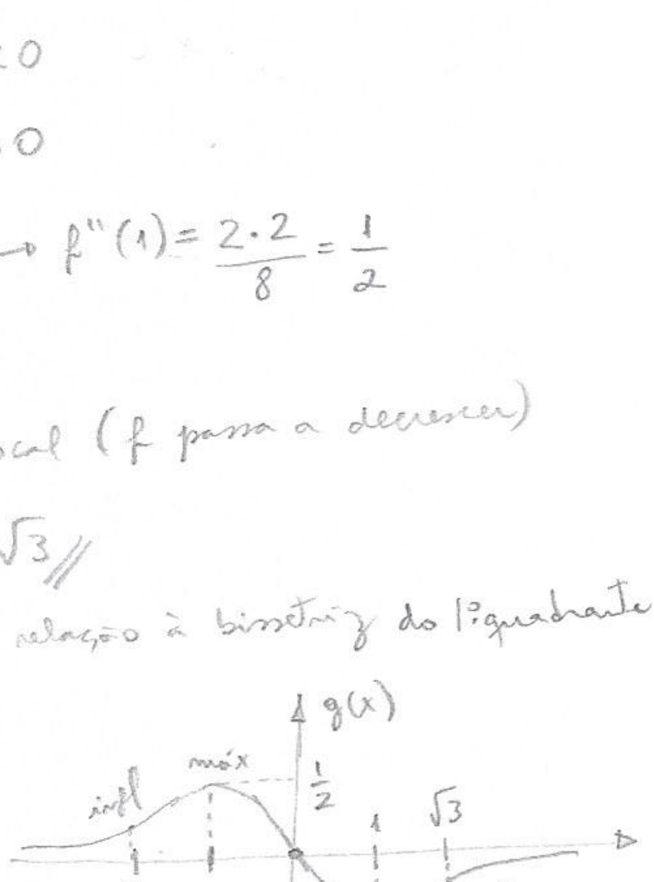
$x = 1$ é mínimo

obs.: $x = 0$ é máximo local (f passa a decrescer)

inflexão $\to f'' = 0 \to x = \sqrt{3}$

4) g é ímpar $\to$ simétrica em relação à bissetriz do 1º quadrante

curiosidade $\to f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$



$v = x^2+1 \quad v' = 2x$

$u = -x \quad u' = -1$

$x = 0$ é raiz

$x \to \pm\infty \to f \to 0$

9) $D_n = \begin{vmatrix} n+x & n & n & \cdots & n \\ n & n+x & n & \cdots & n \\ n & n & n+x & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} nn+x & n & n & \cdots & n \\ nn+x & n+x & n & \cdots & n \\ nn+x & n & n+x & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nn+x & n & n & \cdots & n+x \end{vmatrix} =$

$C1 \leftarrow C_1+C_2+\dots+C_n$

$= (nn+x) \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ 1 & n+x & n & \cdots & n \\ 1 & n & n+x & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n & \cdots & n+x \end{vmatrix} = (nn+x) \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} =$

$L2 \leftarrow L2-L1$
$L3 \leftarrow L3-L1$
$\vdots$
$Ln \leftarrow Ln-L1$

Chió

$= (nn+x) \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = (nn+x)\, x^{n-1}$

ordem $n-1$
matriz diagonal

(10) a) $E_0 = [0,1]$

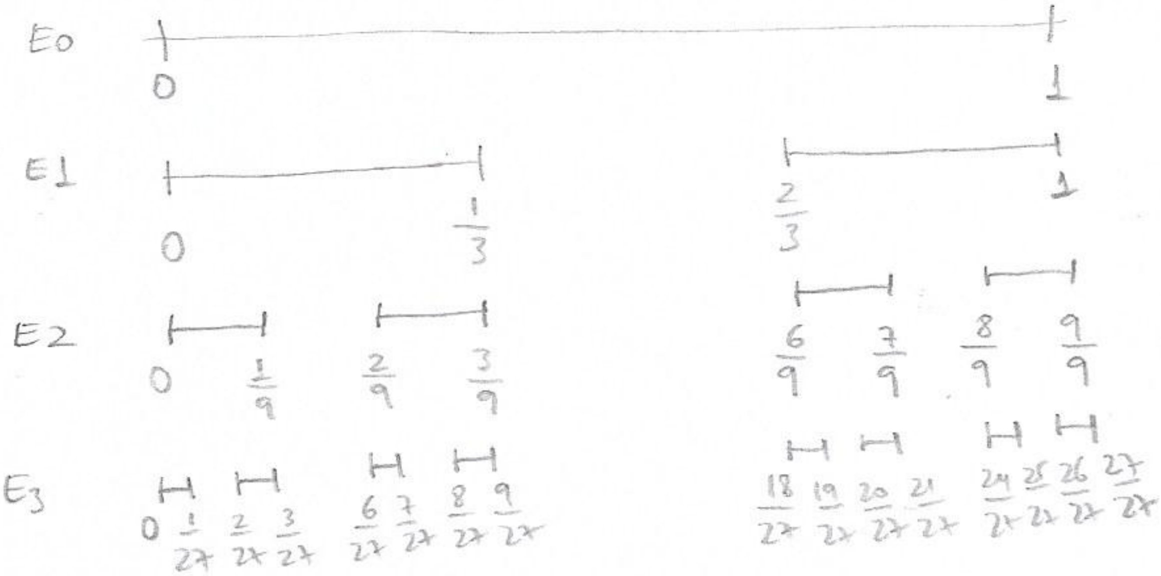
$E_1 = F(E_0) = f_1(E_0) \cup f_2(E_0) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

$E_2 = F(E_1) = f_1(E_1) \cup f_2(E_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup$

$\cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$

$E_3 = F(E_2) = f_1(E_2) \cup f_2(E_2) = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup$

$\left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$



Indução → vale p/ $n=1$ → $E_1 \subset E_0$ → ok

supondo que $E_n \subset E_{n-1}$ → se $y \in E_{n+1}$ → $E_{n+1} = F(E_n)$

$E_{n+1} = f_1(E_n) \cup f_2(E_n)$ → $y \in f_i(E_n)$ → $\exists x,\ x \in E_n$ tq $y = f_i(x)$

Como $E_n \subset E_{n-1}$ → $x \in E_{n-1}$ → $y \in f_i(E_{n-1})$ → $y \in f_1(E_{n-1}) \cup f_2(E_{n-1})$

$y \in F(E_{n-1})$ → $y \in E_n$ → $E_{n+1} \subset E_n$ → ok

b) $A \subset E_0 \to f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$ (vazio)

$$|F(A)| = \underbrace{|f_1(A)|}_{\frac{1}{3}|A|} + \underbrace{|f_2(A)|}_{\frac{1}{3}|A|} = \frac{2}{3}|A|$$

primeiro e último terço de cada intervalo anterior

$$|E_0| = 1 \quad \therefore \quad |E_1| = |F(E_0)| = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad |E_2| = |F(E_1)| = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$|E_n| = |F(E_n)| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to \lim_{n \to \infty} |E_n| = 0 \quad //$$