PROVA DE MATEMÁTICA

CADERNO DE QUESTÕES

Concurso de Admissão
ao
Primeiro Ano
do
Curso de Formação e Graduação

1993 - 1994

1ª Questão: **Valor: 1,0**

Determine o termo independente de x de $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

2ª Questão: **Valor: 1,0**

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sabendo que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são as raízes e que $f(1) = -8$

Pede-se:

a) Determinar a, b, c

b) Calcular f (0)

c) Verificar se f (x) apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta

d) As coordenadas do ponto extremo

e) O esboço do gráfico

3ª Questão: **Valor: 1,0**

Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto.

Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

4ª Questão: **Valor: 1,0**

Considere os números complexos $z = x + y \cdot i$ e $w = y - x \cdot i$, cujos módulos são tais que $|z| = e^{|w| \cdot \frac{\sqrt{3}}{x}}$, e $|w| = e^{|z| \cdot \frac{1}{y}}$, onde e é base dos logaritmos neperianos. Obter a forma polar de z^2.

5ª Questão: **Valor: 1,0**

Um aluno, ao inverter a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 4 & e & f \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] \quad , \quad 1 \leqslant i\ , j \leqslant 3$$

cometeu um engano, e considerou o elemento a_{13} igual a 3, de forma que acabou invertendo a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = \left[b_{ij}\right] .$$

Com esse engano o aluno encontrou

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} .$$ Determinar A^{-1}.

6ª Questão: **Valor: 1,0**

Seja $y = \dfrac{x^2}{2}$ uma parábola com foco F e diretriz d. Uma reta, cujo coeficiente angular é $m \neq 0$, passa por F e corta a parábola em dois pontos M_1 e M_2, respectivamente. Seja G o conjugado harmônico de F em relação a M_1 e M_2. Pede-se:

a) As coordenadas de G em função de m

b) O lugar geométrico do ponto G quando m varia

7ª Questão: **Valor: 1,0**

Sabendo que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos de um triângulo, escreva as restrições que devem ser satisfeitas por este triângulo para que se verifique a igualdade abaixo.

$$\text{sen}\ \hat{A} + \text{sen}\ \hat{B} + \text{sen}\ \hat{C} = 4 \cos \frac{\hat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C}}{2}$$

8ª Questão: **Valor: 1,0**

Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito num círculo e seja I o ponto de interseção de suas diagonais. As projeções ortogonais de I sobre os lados AB , BC , CD e DA são, respectivamente, M , N , P e Q. Prove que o quadrilátero MNPQ é circunscritível a um círculo com centro em I.

9ª Questão: **Valor: 1,0**

Seja C um semi-círculo com centro O e diâmetro PQ = 2r. Sobre o segmento OP, toma-se um ponto N tal que ON = x , $0 \leqslant x \leqslant r$. Por N traça-se uma reta perpendicular a PQ que encontre o semi-círculo em M. A reta tangente ao semi-círculo em M corta a reta PQ em um ponto T:

a) Calcule, em função de r e x, o volume V_1 gerado pela rotação do triângulo MPQ em torno de PQ

b) Calcule, em função de r e x, o volume V_2 gerado pela rotação do triângulo MPT em torno de PQ

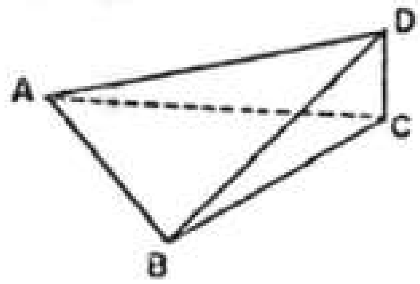
c) Considerando a razão $y = \dfrac{V_2}{V_1}$, quando x varia no intervalo $[\ 0\ ,\ r\ ]$, faça o esboço do respectivo gráfico.

10ª Questão: **Valor: 1,0**

Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura abaixo. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos:

$CD = 10\sqrt{3}$ dm , CD é perpendicular ao plano ABC,

$A\hat{D}C = A\hat{D}B = 60^\circ$ e $B\hat{D}C = 30^\circ$.



Calcule esse volume.

1ª Questão

Binômio de Newton $(a + b)^n$

$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p = \binom{10}{p} (\sqrt{x})^{10-p} (-\frac{1}{\sqrt{x}})^p$

O termo independente é o que não depende de x

Para isso, temos que cancelar x, fazendo 10 – p = p → p = 5

$T_6 = \binom{10}{5} (\sqrt{x})^5 (-\frac{1}{\sqrt{x}})^5$

$T_6 = -\binom{10}{5} = -252$

2ª Questão

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 5)$

f(1) = a.2.(–4) = –8 → a = 1

$f(x) = (x + 1)(x - 5) = x^2 - 4x - 5$ → b = – 4 e c = – 5

b) f(0) = (0 + 1)(0 – 5) = –5

c) Como a = 1, a concavidade da parábola é para cima e o vértice é um ponto de mínimo

d) O ponto extremo é o ponto de mínimo

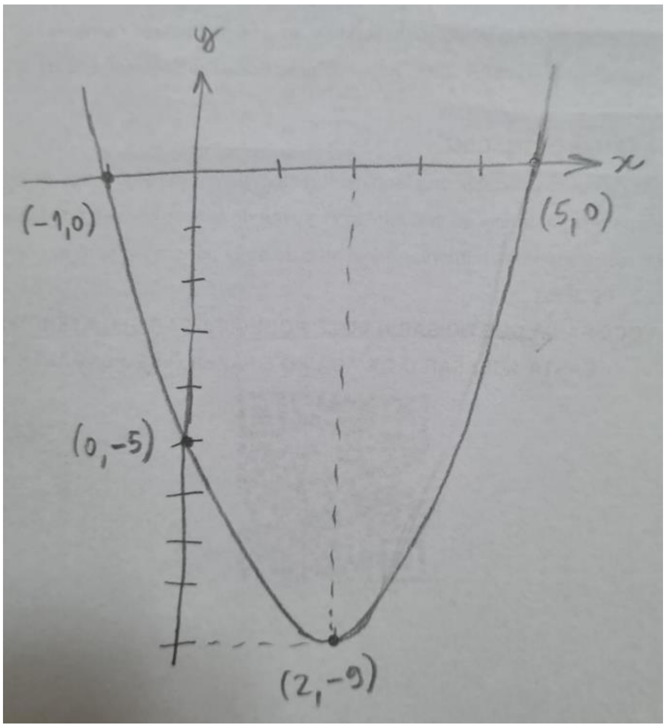
$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = 2$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4.1.(-5)}{4.1} = -\frac{36}{4} = -9$

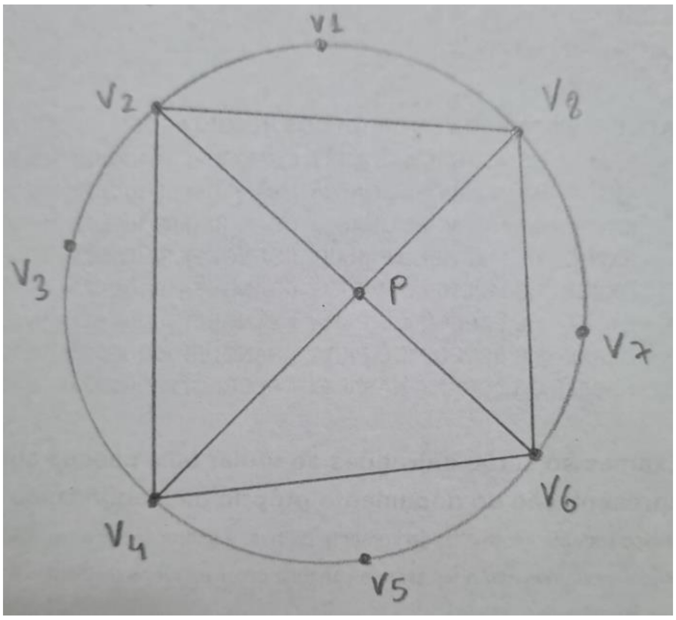
As coordenadas do ponto de mínimo são (2,–9)

(continua)

e)



3ª Questão



O pulo do gato é perceber que cada quatro vértices formam um quadrilátero que gera um único ponto de interseção de diagonais

Logo, o número de interseções de diagonais é o número de quadriláteros que podemos formar a partir de 8 pontos, ou $C_{8,4} = 70$

4ª Questão

z = x + y.i → $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ → na forma polar: $z = \sqrt{x^2+y^2}.e^{i.arc\,tg(\frac{y}{x})}$

w = y – x.i → $|w| = \sqrt{x^2+y^2}$ → |z| = |w| → $e^{|w|.\frac{\sqrt{3}}{x}} = e^{|z|.\frac{1}{y}}$

$\frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{y}$ → $x = y\sqrt{3}$ → $x^2 = 3y^2$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3.y^2+y^2} = \sqrt{4.y^2} = 2.|y|$

$|w| = e^{|z|.\frac{1}{y}} = e^{2.|y|.\frac{1}{y}} = e^{\pm 2}$

$2.|y| = e^{\pm 2}$ → $|y| = \frac{e^{\pm 2}}{2}$ → $y^2 = \frac{e^{\pm 4}}{4}$

Forma polar de $z^2 = (x^2+y^2).e^{2.i.arc\,tg\left(\frac{y}{x}\right)} = 4.y^2.e^{2.i.arc\,tg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 4.\frac{e^{\pm 4}}{4}.e^{2.i.\frac{\pi}{6}}$

Resposta: $e^{\pm 4}.e^{i.\frac{\pi}{3}}$

5ª Questão

O fato de o IME ter chamado a_{31} de a_{13} não interfere na resolução.

$B.B^{-1} = I_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1ª linha, 1ª coluna: 5/2 + 3a – 3b/2 = 1 (eq. 1)

1ª linha, 2ª coluna: a = 0 (eq. 2)

1ª linha, 3ª coluna: –1/2 – a + b/2 = 0 (eq. 3)

2ª linha, 1ª coluna: 3c – 3d/2 = 0 (eq. 4)

2ª linha, 2ª coluna: c = 1 (eq. 5)

2ª linha, 3ª coluna: –c + d/2 = 0 (eq. 6)

3ª linha, 1ª coluna: 15/2 + 3e – 3f/2 = 0 (eq. 7)

3ª linha, 2ª coluna: e = 0 (eq. 8)

3ª linha, 3ª coluna: –3/2 – e + f/2 = 1 (eq. 9)

(eq. 2) na (eq. 3): b = 1

(eq. 5) na (eq. 4): d = 2

(eq. 8) na (eq. 7): f = 5

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

A matriz inversa é (1/det A).(adjunta) = (1/det A).$(\text{cofatores})^T$

det A = 1.1.5 + 0.0.1 + 4.0.2 – 1.0.2 – 0.0.5 – 4.1.1 = 5 – 4 = 1

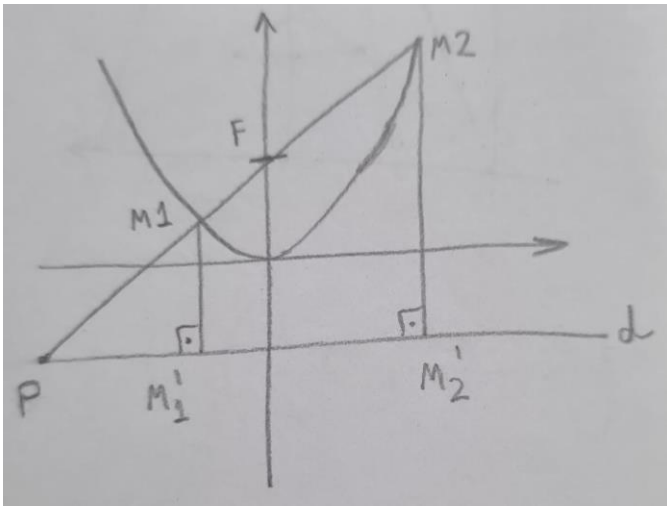
cofatores = $\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}(1.5-0.2) & (-1)^{1+2}(0.5-4.2) & (-1)^{1+3}(0.0-4.1) \\ (-1)^{2+1}(0.5-0.1) & (-1)^{2+2}(1.5-4.1) & (-1)^{2+3}(1.0-4.0) \\ (-1)^{3+1}(0.2-1.1) & (-1)^{3+2}(1.2-0.1) & (-1)^{3+3}(1.1-0.0) \end{pmatrix}$

cofatores = $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

adjunta = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

como det A = 1, A^{-1} = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6ª Questão:



A questão parece de geometria analítica, mas o pulo do gato é por geometria plana

A parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo (foco F) e de uma reta fixa (diretriz d)

Assim, os pontos M1 e M2 da parábola são tais que $M_1F = M_1M_1'$ e $M_2F = M_2M_2'$

Vamos prolongar M1M2 até cortar a diretriz em P

Os triângulos PM1M1' e PM2M2' são semelhantes, então $\frac{M_1P}{M_2P} = \frac{M_1M_1'}{M_2M_2'} = \frac{M_1F}{M_2F}$

Mas o conjugado harmônico de F em relação a M1M2 é o ponto G tal que $\frac{M_1F}{M_2F} = \frac{M_1G}{M_2G}$

Como $\frac{M_1P}{M_2P} = \frac{M_1F}{M_2F} = \frac{M_1G}{M_2G}$, então o ponto P é o ponto G e o lugar geométrico de G é a própria diretriz da parábola

Só usaremos geometria analítica para determinar a ordenada da diretriz a partir da equação da parábola.

Seja H(x,y) um ponto qualquer da parábola, F(0, ℓ) o foco e y = – ℓ a diretriz, temos HF = Hd, ou $\sqrt{x^2 + (y-\ell)^2} = y + \ell$

Substituindo $x^2 = 2y$ (equação da parábola dada) e elevando ao quadrado, temos $2y + y^2 - 2y\ell + \ell^2 = y^2 + 2y\ell + \ell^2$; daí, $2y = 4y\ell$, e, finalmente, $\ell = 1/2$

Assim, as coordenadas de G são dadas pela interseção da reta y = m.x + 1/2, de inclinação m e que passa pelo foco F(0,1/2) com a diretriz y = –1/2, resultando m.x = –1, ou x = –1/m.

Resposta: a) as coordenadas de G são x = –1/m e y = –1/2

b) lugar geométrico de G é a diretriz y = –1/2 da parábola

7ª Questão:

Se A, B e C são os ângulos de um triângulo:

A + B + C = 180º → C = 180 – (A+B)

$$sen\ A + sen\ B + sen\ C = 2.sen\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + sen(180-(A+B)) =$$

$$= 2.sen\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + sen(A+B) =$$

$$= 2.sen\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2.sen\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) =$$

$$= 2.sen\left(\frac{A+B}{2}\right).\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] =$$

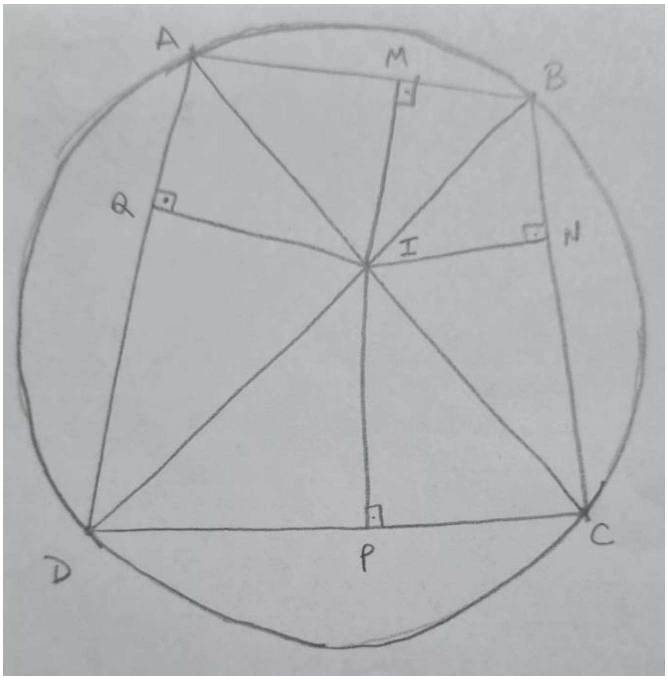
$$= 2.sen\left(\frac{180-C}{2}\right).2.\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\right).\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right) =$$

$$= 2.sen\left(90-\frac{C}{2}\right).2.\cos\left(\frac{A}{2}\right).\cos\left(\frac{B}{2}\right) = 2.\cos\left(\frac{C}{2}\right).2.\cos\left(\frac{A}{2}\right).\cos\left(\frac{B}{2}\right) =$$

$$4.\cos\left(\frac{A}{2}\right).\cos\left(\frac{B}{2}\right).\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

Resposta: Não há restrições, a relação vale para qualquer triângulo

8ª Questão:



Queremos provar que o quadrilátero MNPQ é circunscrito a um círculo de centro em I

Para isso, temos que demonstrar que I é ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos QMN, MNP, NPQ e PQM.

O quadrilátero AQIM tem dois ângulos retos opostos AQI e AMI, logo é inscrito na circunferência de diâmetro AI. Nessa circunferência, os ângulos QAI e QMI são iguais porque subtendem o arco QI. Na circunferência maior, da figura, o ângulo DAC, que é o ângulo QAI, subtende o arco DC.

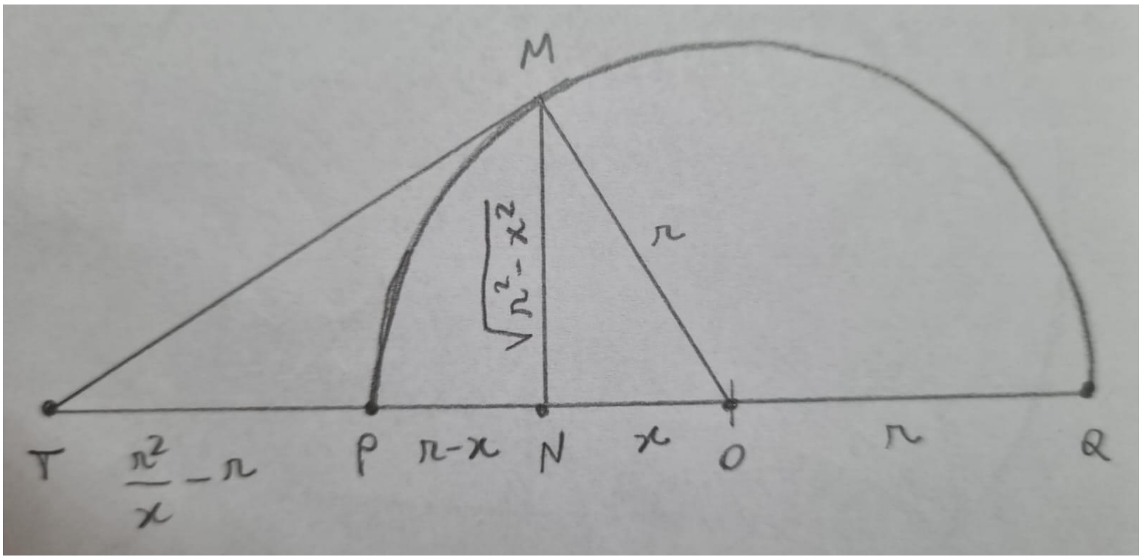
O quadrilátero MINB tem dois ângulos retos opostos BMI e BNI, logo é inscrito na circunferência de diâmetro BI. Nessa circunferência, os ângulos IMN e IBN são iguais porque subtendem o arco IN. Na circunferência maior, da figura, o ângulo DBC, que é o ângulo IBN, subtende o arco DC.

Assim, os ângulos QAI e IBN são iguais (arco DC). Como QAI = QMI e IBN = IMN, então QMI = IMN e MI é bissetriz de QMN.

Analogamente, NI é bissetriz de MNP, PI é bissetriz de NPQ e QI é bissetriz de PQM.

Logo, I equidista de MN, NP, PQ e QM e é o centro do círculo inscrito em MNPQ.

9ª Questão



a) A rotação do triângulo MPQ em torno de PQ é a reunião de dois cones, um com altura NP, outro com altura NQ, mas ambos com raio da base MN

$$MN = \sqrt{OM^2 - ON^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

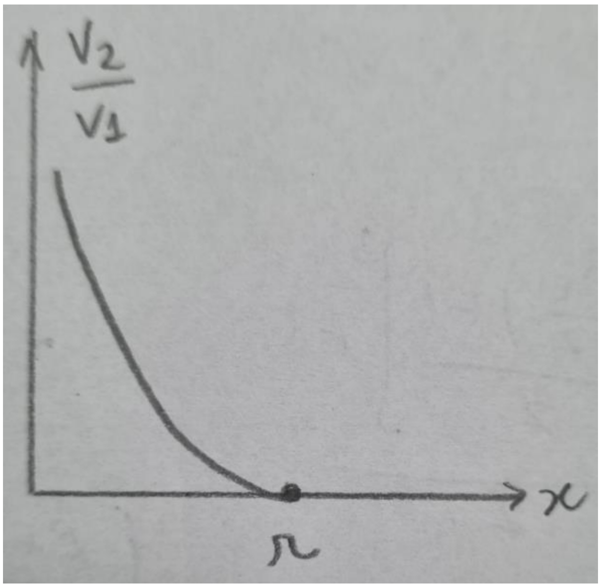
$$V_1 = \frac{\pi.MN^2.NP}{3} + \frac{\pi.MN^2.NQ}{3} = \frac{\pi.MN^2.(NP+NQ)}{3} = \frac{\pi.MN^2.PQ}{3} = \frac{\pi.(r^2-x^2).2.r}{3}$$

b) A rotação do triangulo MPT em torno de PQ é a diferença entre dois cones, um com altura NT, outro com altura NP, mas ambos com raio da base MN

$$OM^2 = OT.ON \quad \rightarrow \quad r^2 = OT.x \rightarrow OT = \frac{r^2}{x} \rightarrow PT = OT - OP = \frac{r^2}{x} - r$$

$$V_2 = \frac{\pi.MN^2.NT}{3} - \frac{\pi.MN^2.NP}{3} = \frac{\pi.MN^2.(NT-NP)}{3} = \frac{\pi.MN^2.PT}{3} = \frac{\pi.(r^2-x^2).(\frac{r^2}{x}-r)}{3}$$

c) $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{r^2}{x}-r}{2r} = \frac{r}{2x} - \frac{1}{2}$ → se x tende a 0, V_2/V_1 tende a ∞; se x=r, $V_2/V_1=0$



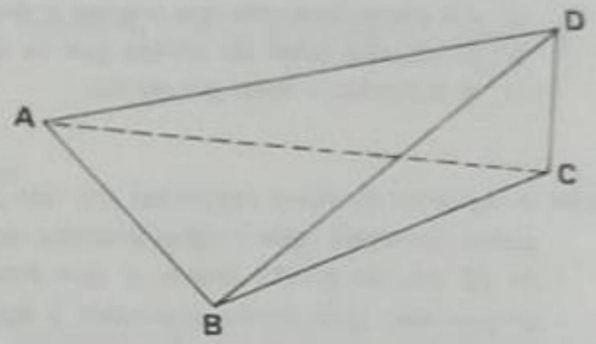
10ª Questão

Esta questão é de uma edição antiga do livro Fundamentos de Matemática Elementar, volume 10, e estava com resposta errada (volume negativo!)

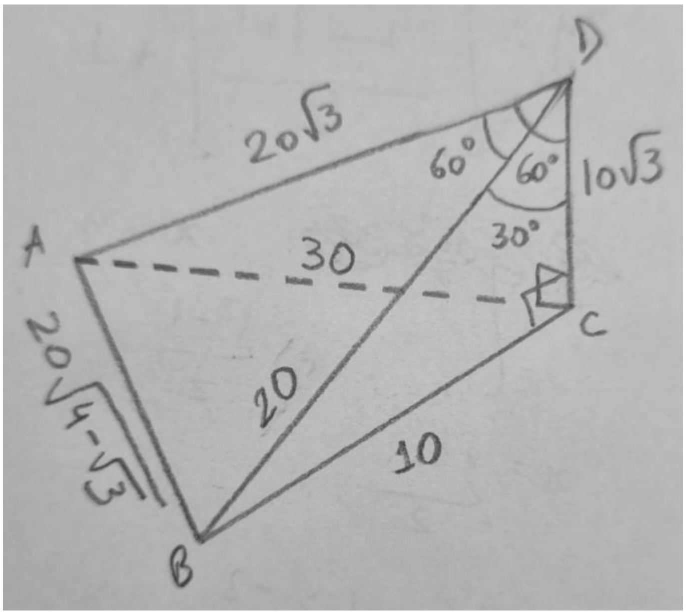
J.514 Na exploração de uma mina foi feito o corte indicado na figura ao lado. Para calcular o volume do minério extraído do corte, foram medidos: $CD = 10\sqrt{3}\,m$ e que é perpendicular ao plano ABC e os ângulos:

$A\widehat{D}C = 60°$
$B\widehat{D}C = 30°$
$A\widehat{D}B = 60°$

Calcular esse volume.



J.514 $\frac{250}{3} \cdot \sqrt{3(88\sqrt{3} - 153)}$



$CD = 10\sqrt{3}$ dm

O triângulo ACD é retângulo com ângulo ADC=60º

AD.cos60 = CD → AD/2 = $10\sqrt{3}$ → AD = $20\sqrt{3}$ dm

AC = AD.sen60 = $20\sqrt{3}.\sqrt{3}/2$ = 30 dm

O triângulo BCD é retângulo com ângulo BDC=30º

BD.cos30º = CD → BD. $\sqrt{3}/2 = 10\sqrt{3}$ → BD = 20 dm

BC = BD.sen30º = 20/2 = 10 dm

O triângulo ABD tem lados AD = $20\sqrt{3}$ e BD = 20 e ângulo ADB = 60º

Podemos determinar o lado AB pela lei dos cossenos

$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2.AD.BD.cosADB} = \sqrt{400.3 + 400 - 2.20\sqrt{3}.20.cos60º} = \sqrt{400.4 - 400.\sqrt{3}} = 20\sqrt{4-\sqrt{3}}$ dm

$$V = \frac{S_{base}.h}{3} = \frac{S_{ABC}.CD}{3} = \frac{\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}.CD}{3}$$

$$p = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{20\sqrt{4-\sqrt{3}}+30+10}{2} = 20 + 10\sqrt{4-\sqrt{3}}$$

$$p - AB = 20 + 10\sqrt{4-\sqrt{3}} - 20\sqrt{4-\sqrt{3}} = 20 - 10\sqrt{4-\sqrt{3}}$$

$$p - AC = 20 + 10\sqrt{4-\sqrt{3}} - 30 = 10\sqrt{4-\sqrt{3}} - 10$$

$$p - BC = 20 + 10\sqrt{4-\sqrt{3}} - 10 = 10\sqrt{4-\sqrt{3}} + 10$$

$$p(p-a) = \left(20 + 10\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)\left(20 - 10\sqrt{4-\sqrt{3}}\right) = 20^2 - \left(10\sqrt{4-\sqrt{3}}\right)^2 = 400 - 100\left(4-\sqrt{3}\right) = 100\sqrt{3}$$

$$(p-AC)(p-BC) = \left(10\sqrt{4-\sqrt{3}} - 10\right)\left(10\sqrt{4-\sqrt{3}} + 10\right) = (10\sqrt{4-\sqrt{3}})^2 - 10^2 = 100\left(4-\sqrt{3}\right) - 100 = 300 - 100\sqrt{3} = 100(3-\sqrt{3})$$

$$V = \frac{\left(\sqrt{100.\sqrt{3}.100.(3-\sqrt{3})}\right).10.\sqrt{3}}{3} = \frac{100.\sqrt{3}.\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right).10.\sqrt{3}}{3} = 1000.\sqrt{\sqrt{3}-1}dm^3$$