PROVA DE MATEMÁTICA DO VESTIBULAR 2001/2002 DO INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

1ª QUESTÃO valor 1,0

Calcule a soma dos números entre 200 e 500 que são múltiplos de 6 ou de 14, mas não simultaneamente múltiplos de ambos.

2ª QUESTÃO valor 1,0

Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz [R], abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\operatorname{sen}(n\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3ª QUESTÃO valor 1,0

Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto (0,0). Define-se a sub-normal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das sub-normais dessa parábola.

4ª QUESTÃO valor 1,0

Sabe-se que $\log_a b = X$, $\log_q b = Y$ e $n > 0$, onde n é um número natural. Sendo c o produto dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q, calcule o valor de $\log_c b$ em função de X, Y e n.

5ª QUESTÃO valor 1,0

(a) Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio P(x) de quarto grau para que P(x) = P(1-x).

(b) Considere o polinômio $P(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz à condição do item acima.

6ª QUESTÃO valor 1,0

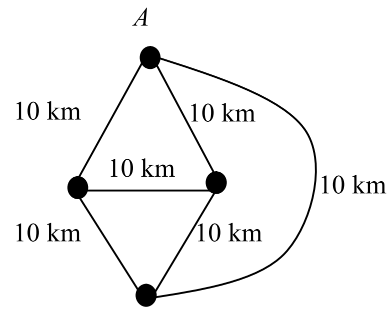
Um cone e um cilindro circulares retos têm uma base comum e o vértice do cone se encontra no centro da outra base do cilindro. Determine o ângulo formado pelo eixo do cone e sua geratriz, sabendo-se que a razão entre a área total do cilindro sobre e a área total do cone é 7/4.

7ª QUESTÃO valor 1,0

Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo. Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, com:

a) exatamente 50 km?

b) $n \times 10$ km?



8ª QUESTÃO valor 1,0

(a) Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x.y.z}$$

Em que condições a igualdade se verifica?

(b) Considere um paralelogramo de lados a, b, c, e área total S0. Determine o volume máximo desse paralelepípedo em função de S0. Qual a relação entre a, b e c para que esse volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

9ª QUESTÃO **valor 1,0**

Resolva a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}}=x$, sabendo-se que $x>0$.

10ª QUESTÃO **valor 1,0**

Considere um quadrado XYZW de lado a. Dividindo-se cada angulo desse quadrado em quarto partes iguais, obtém-se o octógono regular representado na figura abaixo. Determine o lado e a área desse octógono em função de a. As respostas finais não podem conter expressões trigonométricas.