1ª QUESTÃO **Valor 1,0**

Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo. Demonstre que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

2ª QUESTÃO **Valor 1,0**

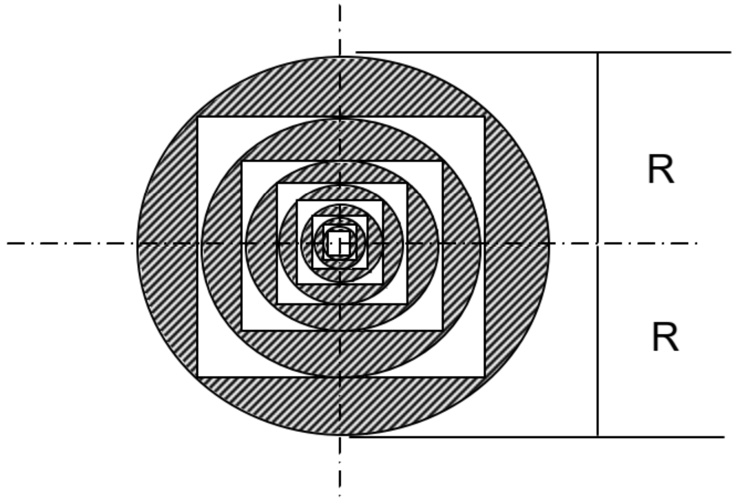
Determine todos os valores reais de x que satisfazem a equação:

$$\left| \log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right) \right| = \log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right),$$

onde $\log(y)$ e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de y.

3ª QUESTÃO **Valor 1,0**

Dada numa circunferência de raio R, inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R, a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.

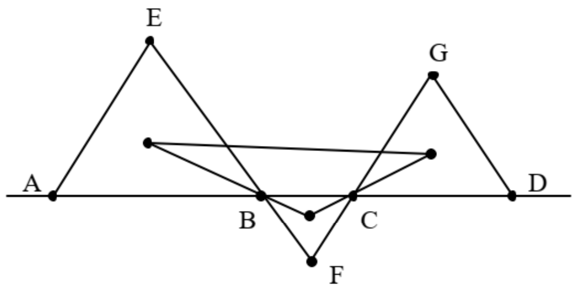


4ª QUESTÃO **Valor 1,0**

Resolva a equação tg a + tg (2 a) = 2 tg (3 a), sabendo-se que a $\in$ [0, π/2).

5ª QUESTÃO — Valor 1,0

Sobre uma reta r são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G encontram-se do mesmo lado da reta r, enquanto que o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. Calcule a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG, em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.



6ª QUESTÃO — Valor 1,0

Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. Determine o valor máximo da área de um triangulo XYZ, sabendo-se que:

a) os pontos X,Y e Z estão situados sobre lados do hexágono;
b) a reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

7ª QUESTÃO — Valor 1,0

Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por definição, uma função f: $A \to B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in A$.

a) Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, quantas funções de A para B são crescentes?

b) Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, ..., n\}$, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

8ª QUESTÃO — Valor 1,0

Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular ABCD. O lado da base da pirâmide mede l e a aresta lateral $l\sqrt{2}$. Corta-se a essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta BD, e contém o ponto médio da aresta VC. Calcule a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

9ª QUESTÃO **Valor 1,0**

Demonstre que $\sqrt[3]{20+14.\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14.\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

10ª QUESTÃO **Valor 1,0**

Considere uma matriz A, n x n, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = k\,A$, prove que a matriz A+I é invertível, onde I é a matriz identidade n x n