IME 1964

PROVA DE ÁLGEBRA

1a. QUESTÃO

1.1 - Quantas côres diferentes se podem formar, usando as sete côres do espectro fundamental ?

SOLUÇÃO:

$$n = C_1^7 + C_2^7 + C_3^7 + C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 + C_7^7 = 2^7 - 1 = 127.$$

RESPOSTA: 127

1.2 - Demonstre, usando a fórmula do binômio de Newton, que

$$C_o^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$$

Obs.: O símbolo C_i^n indica combinações de "n" elementos "i" a "i".

$$(x+a)^n = C_o^n x^n + C_1^n x^{n-1} a + C_2^n x^{n-2} a^2 + \ldots + C_n^n a^n$$

Fazendo-se $x = a = 1$, tem-se:

$$2^n = C_o^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n$$

1.3 - Calcule o limite da função $y = \dfrac{x^m - a^m}{x - a}$, quando "x" tende para "a".

SOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim_{x \to a} \left[x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-2} + \right.$$

$$\left. + a^{m-1} \right] = ma^{m-1}$$

RESPOSTA: ma^{m-1}

1.4 - Determine o $\log_2 0{,}125$, sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}30103$

SOLUÇÃO:

$$\lg_2 0{,}125 = \lg_2 2^{-3} = -3$$

RESPOSTA: -3

1.5 - Decomponha a fração $\dfrac{B}{(x + a)(x + b)}$

numa soma de duas frações.

SOLUÇÃO:

$$\frac{B}{(x + a)(x + b)} = \frac{A_1}{x + a} + \frac{A_2}{x + b}$$

$$B = A_1 (x + b) + A_2 (x + a) \quad \therefore$$

$$A_2 = - A_1 \qquad A_2 = \frac{B}{a - b}$$

$$A_1 = \frac{B}{b - a}$$

RESPOSTA:

$$\frac{B}{(x+a)(x+b)} = \frac{B}{b-a}\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right]$$

1.6 - Demonstre que a multiplicação de um número complexo por "i" corresponde a uma rotação de $\pi/2$ na sua representação gráfica.

SOLUÇÃO:

Tem-se:

$$a + bi = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad \ldots (1)$$

$$i = \cos\pi/2 + i \operatorname{sen}\pi/2 = i \operatorname{sen}\pi/2 \qquad \ldots (2$$

De (1) e (2) :

$$(a + bi)\,i = r\Big[(-\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\pi/2 + \cos\theta\cos\pi/2)$$

$$+\, i\,(\operatorname{sen}\theta\cos\pi/2 + \cos\theta\operatorname{sen}\pi/2\Big] =$$

$$= r\left[\cos(\theta + \pi/2) + i \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)\right]$$

1.7 - Derive a função

$$y = e^{x^x}$$

SOLUÇÃO:

Seja $\quad y = e^z \quad$ e $\quad z = x^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^z \cdot \frac{dz}{dx} = e^z\left[x^x \cdot \ln x + Xx^{x-1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^x}\, x^x \left[\ell n\, x + 1\right]$$

RESPOSTA: $e^{x^x} \cdot x^x \left[\ell nx + 1\right]$

2a. QUESTÃO

Dada a curva cuja equação é $y = -2x^2 + 2x + 12$, determinar:

2.1 - A equação da reta tangente a esta curva, que é paralela à corda comum aos círculos

$$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 4 = 0$$
$$x^2 + 8x + y^2 - 16y + 76 = 0.$$

SOLUÇÃO:

Equação da reta suporte da corda comum aos círculos dados:

$$12x - 6y + 72 = 0 \qquad \text{ou}$$

$$L = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 2x - y + 12 = 0 \right\} \qquad \ldots(1)$$

Sendo C a parábola de equação: $y = -2x^2 + 2x + 12$, verifica-se que: $L \cap C = \left\{ (0,12) \right\}$, logo, a reta L é a própria tangente procurada.

RESPOSTA: $2x - y + 12 = 0$

2.2 - A área da superfície limitada pela curva dada e a reta $2x-y+4=0$ (em cm^2), usando o cálculo integral.

SOLUÇÃO:

Sendo:

$$L = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 2x - y + 4 = 0 \right\} \quad \text{e} \quad C = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y = -2x^2 + 2x + 12 \right\},$$

então: $M \cap C = \left\{ (-2,0)\ ,\ (2,8) \right\}$; e

$$S = \int_{-2}^{2} (Y_C - Y_M)\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 2x + 12) - (2x + 4)\, dx = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)\, dx =$$

$$= -2\, x^3/3 + 8x \Big]_{-2}^{2} = 64/3 \text{ cm}^2 .$$

RESPOSTA: $64/3 \text{ cm}^2$

3a. QUESTÃO

3.1 - Dar os valores de "x" que satisfazem à inequação:

$$x^2 - 2 > -x^2 + 4x + 4$$

SOLUÇÃO:

$$2x^2 - 4x - 6 > 0$$

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$, logo:

RESPOSTA:

$$x \in (-\infty\ ;\ -1) \cup (3\ ;\ +\infty)$$

3.2 - Um número complexo variável tem, para parte real, os valores

$$x^2 - 2$$

e para parte imaginária os valores

$$x\sqrt{2}$$

Qual o valor mínimo do módulo dêsse número ?

SOLUÇÃO:

$$|z| = + \sqrt{x^4 - 2x^2 + 4}$$

Os valores mínimos de $|Z|$ ocorrerão para os valores de x nos quais a função

$$y = x^4 - 2x^2 + 4$$

admite valor mínimo. Então, sendo:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x = 4x\,(x^2 - 1) \qquad \ldots (1)$$

$$4x(x^2 - 1) = 0 \longrightarrow x \in \{0, -1, 1\} \qquad \ldots (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 4 = y''(x) \qquad \ldots (3)$$

$$y''(0) = -4 \qquad \ldots (4)$$

$$y''(-1) = y''(1) = 8 \qquad \ldots (5)$$

De (4) e (5), tem-se que $|Z|$ é mínimo para $x \in \{-1, 1\}$

Então, o valor procurado é : $|Z| = \sqrt{3}$

RESPOSTA: $|Z| = \sqrt{3}$

4a. QUESTÃO

Enunciado: Determine o valor de x_3 que satisfaz ao sistema de equações lineares:

$$
\begin{aligned}
&x_1 &&+ x_2 &&+ x_3 &&+ x_4 &&= 0\\
&x_1\left[(b+c+d)\right] &&+ x_2\left[(a+c+d)\right] &&+ x_3\left[(a+b+d)\right] &&+ x_4\left[(a+b+c)\right] &&= 0\\
&x_1\left[(bc+bd+cd)\right] &&+ x_2\left[(ac+ad+cd)\right] &&+ x_3\left[(ab+ad+bd)\right] &&+ x_4\left[(ab+ac+bc)\right] &&= 0\\
&x_1\, bcd &&+ x_2\, acd &&+ x_3\, abd &&+ x_4\, abc &&= 3
\end{aligned}
$$

SOLUÇÃO:

1) O determinante carcterístico é

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ad+bd & ab+ac+bc \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix}
$$

Subtraindo a 1a. coluna das demais

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b+c+d & (a-b) & (a-c) & (a-d) \\ bc+bd+cd & (a-b)(c+d) & (a-c)(b+d) & (a-d)(b+c) \\ bcd & (a-b)\, cd & (a-c)\, bd & (a-d)\, bc \end{vmatrix}
$$

Desenvolvimento segundo a 1a. linha e colocando $(a-b)\ (a-c)\ (a-d)$ em evidência

$$
\Delta = (a-b)\ (a-c)\ (a-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c+d & b+d & b+c \\ cd & bd & bc \end{vmatrix}
$$

Subtraindo a 1a. coluna dos demais

$$= (a-b)\ (a-c)\ (a-d) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c+d & b-c & b-d \\ cd & (b-c)\ d & (b-d)\ c \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\ (a-c)\ (a-d)\ (b-c)\ (b-d)\ (c-d)$$

<u>SOLUÇÃO:</u>

2) Cálculo de x_3

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & 0 & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & 0 & ab+ac+bc \\ bcd & acd & B & abc \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_3 = -B \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ac+bc \end{vmatrix}$$

Subtraindo a 1a. coluna das demais

$$\Delta x_3 = -B \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c+d & (a-b) & (a-d) \\ bc+bd+cd & (a-b)(c+d) & (a-d)(b+c) \end{vmatrix}$$

$$x_3 = -B\ (a-b)\ (a-d)\ (b-d)$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = -\frac{B\ (a-b)(a-d)(b-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

$$x_3 = \frac{-B}{(a-c)(b-c)(c-d)} = \frac{B}{(a-c)(b-c)(d-c)}$$

RESPOSTA:

RESPOSTA:

$$x_3 = \frac{B}{(a-c)(b-c)(d-c)}$$