MINISTÉRIO DO EXÉRCITO

DEP – DPET

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

COMISSÃO DE EXAME DE ADMISSÃO

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DE ÁLGEBRA

1. Não assine a prova.

2. Utilize caneta esferográfica AZUL. As figuras julgadas necessárias poderão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras côres.

3. Esta prova contém 17 fôlhas, numeradas de 1 a 17.

4. Resolva as questões nos locais reservados para as soluções, onde deverá ser escrito apenas o essencial da solução. Não será considerado o que fôr escrito em outros locais, nem mesmo no rascunho.

5. Não escreva no verso nem nas margens das fôlhas da prova. Use para rascunho o papel distribuído especificamente para êsse fim. Coloque as respostas no espaço indicado.

6. A interpretação faz parte da resolução das questões.

7. Não será fornecido material suplementar. O papel distribuído é suficiente para a resolução sucinta da prova.

8. Todo o material distribuído, inclusive o rascunho, deve ser restituído por ocasião da entrega da prova, na mesma ordem inicial.

9. Não é permitido o uso de tabelas nem de régua de cálculo.

10. Leia os enunciados com atenção. Resolva os itens na ordem que mais lhe convier. Não seja prolixo; evite divagações. Tenha calma e confie em si.

DESEJAMOS-LHE SUCESSO

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 1

1ª QUESTÃO

ITEM: 1 (VALOR: 0,6)

ENUNCIADO: Diga, justificando, se a série $1/2 + 3/8 + 15/48 + 105/384 + \ldots$ é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 2

1ª QUESTÃO

ITEM: 2 (VALOR: 0,6)

ENUNCIADO: A reta $x - 25/4 = 0$ é uma das diretrizes de uma elipse e $(4,0)$ é o foco associado. O centro está na origem. Ache a equação da elipse.

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 3

1ª QUESTÃO

ITEM: 3 (VALOR: 0,6)

ENUNCIADO: Seja g uma função real de variável real, par (isto é: $g(x) = g(-x)$) e derivável. Prove que sua derivada g' é uma função ímpar (isto é: $g'(-x) = -g'(x)$).

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

IME-CEA/1968 | ÁLGEBRA | INSCRIÇÃO Nº ______ | Fls. 4

1ª QUESTÃO

ITEM: 4 (VALOR: 0,6)

ENUNCIADO: Seja f a função definida na coleção dos números reais, tal que:

i) $f(x) = x^2 \text{ sen } 1/x$, $x \neq 0$

ii) $f(0) = 0$.

1) Determine a função f′ derivada de f.

2) Diga, justificando, se f′ é ou não contínua.

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 5

1ª QUESTÃO

ITEM: 5 (VALOR: 0,6)

ENUNCIADO: Resolva a equação $x^{10} - 2x^9 + 2x^8 + x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 12x^2 + 24x - 24 = 0$, a qual admite uma raiz complexa de módulo $\sqrt{2}$ e argumento $\pi/4$.

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

2ª QUESTÃO

ITEM: 1 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Determine a transformada em kx + h da equação $x^3 + 4x^2 - 12x + 160 = 0$, de tal forma que, se $2 - 4i$ fôsse raiz dessa equação, a raiz correspondente da equação transformada seria $0,9 + 0,2i$.

OBSERVAÇÃO: $i = \sqrt{-1}$

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

2ª QUESTÃO

ITEM: 2 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Seja f uma função real de variável real, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ |x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

Determine a função F, real de variável real, cuja derivada seja f, de modo que F(0)=0.

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 8

2ª QUESTÃO

ITEM: 3 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Seja m um inteiro maior que zero. Calcule o valor do somatório dos inversos dos cubos das raízes da equação $mx^4 + 8x^3 - 139x^2 - 18x + 9 = 0$ (sem resolvê-la).

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

2ª QUESTÃO

ITEM: 4 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Sejam r, m, p números reais maiores que zero, A a coleção dos pares (x,y) de números reais positivos tais que x + y = r e f a função cujo conjunto de definição é A e que associa a cada par (x,y) de A o número $x^m y^p$. Mostre que f tem máximo quando $\frac{x}{m} = \frac{y}{p}$.

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 10

2ª QUESTÃO

ITEM: 5 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Sejam: A o conjunto dos números reais x, tais que $x^2 - 7 \neq 0$; B, o conjunto dos números reais x, tais que $x^2 + 4x - 5 \geq 0$; F e G funções cujos conjuntos de definição são A e B respectivamente, tais que:

$$F(x) = \frac{x^2}{x^2-7} \text{ e } G(x) = -\sqrt{x^2+4x-5}$$

Determine o conjunto de definição da função H, composta de G com F (isto é, H(t) = F(G(t))).

SOLUÇÃO:

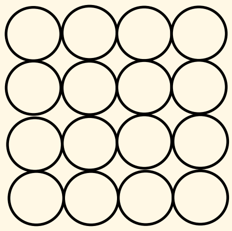
RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 11

2ª QUESTÃO

ITEM: 6 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Uma pilha de esferas iguais é obtida dispondo-se as esferas em camadas sucessivas, de tal forma que a camada inferior forme um "quadrado" com $4n^2$ esferas, conforme é ilustrado pela figura, para $n = 2$, e apoiando-se camadas sucessivas sôbre a primeira, de tal modo que cada esfera de uma camada se apóie sôbre quatro esferas da imediatamente abaixo. Sabendo-se que a expressão $An^3 + Bn^2 + Cn + D$ indica o número de esferas contidas nas n primeiras camadas da pilha, determine os valores numéricos das constantes A, B, C e D.



SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

3ª QUESTÃO

ITEM: 1 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Calcule a área da superfície delimitada pelos gráficos de:

$9x^2 + 16y^2 - 24xy - 20x - 15y = 0$

$2x - 11y + 15 = 0$

SOLUÇÃO:

RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO N° ______	Fls. 13

3ª QUESTÃO

ITEM: 2 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Sabe-se que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e\sqrt{2}; \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 2\sqrt{e};$$

$$\lim_{h\to\infty} \sum_{j=1}^{h} p_j = +\infty, \; p_j > 0, \text{ qualquer que seja } j = 1, 2, 3, \ldots$$

Calcule $\displaystyle \lim_{l\to\infty} \left[\frac{\sum_{i=1}^{l} a_i b_i}{l} + \frac{\sum_{i=1}^{l} p_i b_i}{\sum_{i=1}^{l} p_i} \right]$

SOLUÇÃO:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 14

3ª QUESTÃO

ITEM: 2 (VALOR: 0,7)

(Continuação da solução)

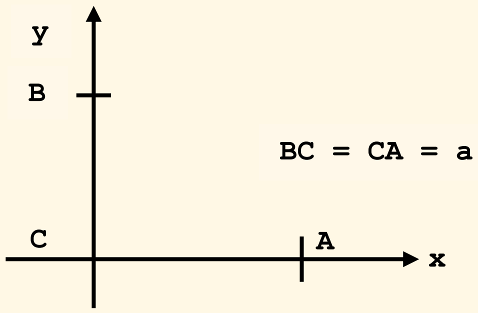
RESPOSTA:

IME-CEA/1968 | ÁLGEBRA | INSCRIÇÃO N° ______ | Fls. 15

3ª QUESTÃO

ITEM: 3 (VALOR: 0,7)

<u>ENUNCIADO</u>: Conforme a figura abaixo, considere um triângulo retângulo isósceles ABC e o círculo β a êle circunscrito; sôbre a circunferência toma-se um ponto M, distinto de A, B e C de tal modo que as retas MA, MB e MC cortem as retas BC, CA e AB nos pontos A′, B′ e C′ respectivamente. Considere-se o círculo Γ_M que passa por A′, B′ e C′. Mostre que, quando M descreve o círculo β, nas condições acima, os círculos Γ_M têm os seus centros sôbre uma reta fixa e cortam ortogonalmente um círculo fixo.



<u>SOLUÇÃO</u>:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 16

3ª QUESTÃO

ITEM: 3 (VALOR: 0,7)

(Continuação da solução)

RESPOSTA:

IME-CEA/1968	ÁLGEBRA	INSCRIÇÃO Nº ______	Fls. 17

3ª QUESTÃO

ITEM: 4 (VALOR: 0,7)

ENUNCIADO: Seja π um polígono plano convexo de p + 1 lados, p ≥ 2. Em função explícita exclusivamente de p e de constantes numéricas, determine de quantas maneiras diferentes se pode decompor π em triângulos por meio de diagonais que não se cortem no interior de π. Se p + 1 = 3, pressupor que o número de decomposições em causa é 1 (um).

SOLUÇÃO:

RESPOSTA: