PROVA DE ALGEBRA

1ª QUESTÃO - ITEM 1

Valor 0,7

ENUNCIADO: Em um triângulo são dados dois lados $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Determinar a expressão do lado $\underline{c}$ em função de $\underline{a}$ e $\underline{b}$, para que a área do triângulo seja máxima.

SOLUÇÃO: Seja α o ângulo determinado pelos lados $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Tem-se, então:

i) $0 < \alpha < \pi$

ii) área do triângulo: $S = 1/2 \ ab \operatorname{sen} \alpha$

De ii), S é máxima para $\alpha = \pi/2$, logo o triângulo é retângulo, e

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

RESPOSTA: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1ª QUESTÃO - ITEM 2

Valor 0,7

ENUNCIADO: Seja n um número inteiro positivo, tal que os coeficientes dos 5º, 6º e 7º têrmos, em relação a x, do desenvolvimento de

$$\left(\frac{\log_n \sqrt{2}^{\,n}}{\log_e n \cdot \log_n \sqrt{2^e}} + x \right)^n ,$$

segundo as potências decrescentes de x, estão em progressão aritmética.

Determinar $\underline{n}$.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: $\underline{e}$ é a base do sistema de logaritmos neperianos.

SOLUÇÃO:

Tem-se:

$$\text{i)}\quad \lg_e n \; \lg_n \sqrt{2}^{\,e} = \lg_n \sqrt{2}^{\,n}$$

$$\text{ii)}\quad \left(\frac{\lg_n \sqrt{2}^{\,n}}{\lg_e n \; \lg_n \sqrt{2}^{\,e}} + x \right)^n = (1 + x)^n , \; \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ e}$$

Então :

$$\text{iii)}\quad : \; C_n^4 \, . \, C_n^5 \, . \, C_n^6$$

De iii) , tem-se que : $\quad 2\, C_n^5 = C_n^4 + C_n^6$

Mas : $C_n^5 = \dfrac{n\,!}{(n-6)\,!\;4!5}$ e $C_n^4 = \dfrac{n\,!}{(n-6)\,!\;(n-4)\;(n-5)4}$

logo : $$\frac{2\,n\,!}{(n-6)!(n-5)4!5} \quad \frac{n\,!}{(n-6)!(n-4)(n-5)4!} + \frac{n\,!}{(n-6)!4!5,6} \quad \text{ou}$$

$$\frac{2}{5}(n-4) = 1 + \frac{(n-5)\,(n-4)}{30} \quad \therefore$$

$$n^2 - 21\,n + 98 = 0 \quad \Longrightarrow \quad n \in \{7,\; 14\}$$

RESPOSTA: $n \in \{7,\; 14\}$

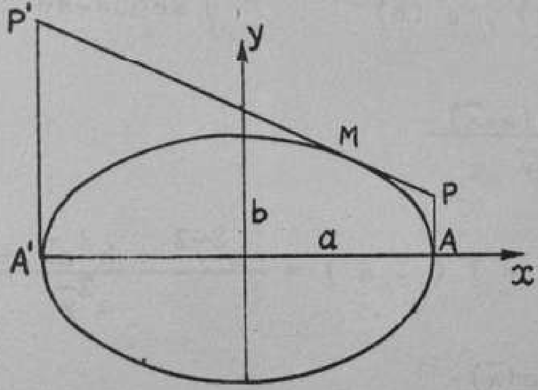
1ª QUESTÃO - ITEM 3

Valor 0,7

ENUNCIADO: Seja E uma elípse de semi-eixos a e b conforme ilustra a figura.

Considere-se uma tangente variável PP′ em um ponto M de E, compreendido entre duas tangentes fixas às extremidades do eixo focal de E.

Calcular o produto $\overline{AP}$. $\overline{A'P'}$



SOLUÇÃO:

Sejam : $E = \left\{(x,y) \mid x \in IR \, , \, y \in IR \wedge \dfrac{x^2}{a^2} \quad \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ (1)

$T = \left\{(x,y) \mid x \in IR \, , \, y \in IR \wedge y-\bar{y} = m(x-\bar{x})\right.$ (2)

tais que $PP' \subset T$ e $E \cap T = M = (\bar{x},\bar{y})$ (3)

Então : $(x,y) \in E \Rightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ (4)

e $26^2 x + 2a^2 yy' = 0 \;\therefore\; y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$. (5)

logo $m = -\dfrac{b^2 \bar{x}}{a^2 \bar{y}}$; (6)

$$(x,y) \in T \Rightarrow y-\bar{y} = -\frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}\,(x-\bar{x}) \quad , \text{ ou :}$$

$$y = T\,(x) = \bar{y} - \frac{b^2\bar{x}}{a^2\bar{y}}\,(x-\bar{x}) \tag{7}$$

Logo: $$\overline{AP} = T\,(a) = \frac{a^2\bar{y}^2 - ab^2\bar{x} + b^2\bar{x}^2}{a^2\bar{y}} \tag{8}$$

De (3) , (4) , e (8) , segue-se :

$$\overline{AP} = \frac{b^2\,(a-\bar{x})}{a\bar{y}} \tag{9}$$

Anàlogamente: $$\overline{A'P'} = T\,(\,-\,a\,) = \frac{a^2\bar{y}^2 + b^2a\bar{x} + b^2\bar{x}^2}{a^2\bar{y}} = \tag{10}$$

$$= \frac{b^2\,(a+\bar{x})}{a\bar{y}}$$

De (9) e (10) , segue-se :

$$\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = T(a)\,.\,T(-a) = \frac{b^4\,(a^2-x^2)}{a^2\,\bar{y}^2} \tag{11}$$

De (3) , (4) e (11) , tem-se :

$$\overline{AP} \cdot \overline{A'P'} = \frac{b^4\,(a^2-x^2)}{b^2\,(a^2-x^2)} = b^2$$

RESPOSTA: b^2

1ª QUESTÃO - ITEM 4

Valor 0,7

ENUNCIADO: Calcular o determinante de 4ª ordem:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

completando os quadros abaixo, de forma que o 6º quadro indique imediatamente a resposta, sem recurso necessário à operação de adição.

SOLUÇÃO: No que se segue, $L_{ab}(K)$ indica que os elementos da linha $\underline{a}$, foram adicionados aos elementos correspondentes da linha $\underline{b}$, prèviamente multiplicados pelo número real K.

1º Quadro 4ª ordem; 2º Quadro 4ª ordem

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_{31}(-2)} =$$

3º Quadro 4ª ordem; 4º Quadro 4ª ordem

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_{41}(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-3)} =$$

5º Quadro

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 17 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_{43}(-4)}$$

$\xrightarrow{L_{42}(-7)}$

4ª ordem

6º Quadro

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +3$$

4ª ordem

2ª SOLUÇÃO:

1º Quadro

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1/4 & -1 & 1 \\ 2 & 7/4 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

2º Quadro

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1/4 & 0 & 1 \\ 2 & 7/4 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 29 & 0 \end{vmatrix}$$

3º Quadro

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & -3 \\ 2 & 7/4 & 7 & -5 \\ 1 & 6 & 29 & -4 \end{vmatrix}$$

4º Quadro

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 2 & 7/4 & 7 & 16 \\ 1 & 6 & 29 & 68 \end{vmatrix}$$

5º Quadro

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 2 & 7/4 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 29 & 12/7 \end{vmatrix} = +3$$

RESPOSTA: $1 \times 1 \times 3 \times 1 = 3$

1ª QUESTÃO - ITEM 5

Valor 0,7

ENUNCIADO: Sejam :

i) A e B números reais, $B \neq 0$.

ii) n e k, inteiros, maiores que zero.

iii) Para cada n, seja r_n a raiz principal (menor determinação) de índice n do número $i^{4n+1} + i^{4n}$.

Admitamos que:

$$\frac{A\ e^{4\pi i} + B\ e^{\left(\frac{3\pi i}{4}\right)}}{r_n} = k$$

Determinar o valor de n de tal forma que A/B seja mínimo.

OBSERVAÇÃO: $i = \sqrt{-1}$

SOLUÇÃO: Sendo $z = i^{4n+1} + i^{4n} = 1 + i$, tem-se, de acôrdo com o enunciado:

$$r_n = (1+i)^{1/n} = \sqrt[2n]{2}\ e^{\pi/4n} \qquad (1)$$

$$A\ e^{4\pi i} + B\ e^{3\pi i/4} = A - B\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{B\sqrt{2}}{2}\, i =$$

$$= k\sqrt[2n]{2}\ e^{\pi/4n} \qquad (2)$$

De (2), segue-se :

$$\begin{cases} A - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = k\sqrt[2n]{2}\cos \pi/4n \\ B\dfrac{\sqrt{2}}{2} = k\sqrt[2n]{2}\ \mathrm{sen}\ \pi/4n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = k\sqrt[2n]{2}\,(\mathrm{sen}\ \pi/4n + \cos \pi/4n) \\ B = \sqrt{2}.\, k\sqrt[2n]{2}\ \mathrm{sen}\ \pi/4n \end{cases} \qquad (3)$$

Logo : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \cot \pi/4n \right)$ (4)

De (4), tem-se que, para que A/B seja mínimo, deve-se ter $\cot \pi/4n$ mínimo, o que acarreta n mínimo, logo, pelo enunciado: $n = 1$.

RESPOSTA: $n = 1$

1ª QUESTÃO - ITEM 6

Valor 0,7

ENUNCIADO: Seja $P(x)$ um polinômio do 4º grau, em x, cujo coeficiente do têrmo de maior grau é 1 e cujas raízes são racionais. Adicionando-se 3/4 e 3 a essas raízes, obtêm-se transformadas de $P(x) = 0$ desprovidas do têrmo do 3º grau e do 1º grau, respectivamente.

Determinar o polinômio $P(x)$ sabendo-se que êle possui duas raízes iguais e que a tangente ao gráfico na origem tem coeficiente angular igual a - 15.

SOLUÇÃO: Tem-se : $P(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ (1)

$$y = x + h \quad \therefore \quad x = y - h \qquad (2)$$

$$P(y-h) = P(-h) + P'(-h)\,y + \frac{P''(-h)}{2!}y^2 + \frac{P'''(-h)}{3!}y^3 + \frac{P^{IV}(-h)}{4!}y^4 \qquad (3)$$

Onde:

$$P'(x) = 4x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 \qquad (4)$$

$$P''(x) = 12x^2 + 6a_1x + 2a_2 \qquad (5)$$

$$P'''(x) = 24x + 6a_1 \qquad (6)$$

Do enunciado: $P'''(-3/4) = 0$ (7)

De (6) e (7), tem-se : $a_1 = 3$ (8)

Sendo $\quad P'(-3) = 0 \quad ,$ (9)

vem :

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 9 & 2a_2 & a_3 \\ \hline -3 & 4 & -3 & 9+2a_2 & \boxed{-27-6a_2+a_3=0} \end{array} \quad \therefore \quad a_2 = \frac{a_3-27}{6} \qquad (10)$$

Mas $\quad P'(0) = -15$ (11)

Logo: $\quad a_3 = -15$ (12)

De (10) e (12) , segue-se : $\quad a_2 = -7$ (13)

Se $P(x)$ possui duas raízes iguais, e sendo, por (10) $P'(x) = (x+3)(4x^2 - 3x - 5)$, segue-se que $x = -3$ é raiz dupla de $P(x) = 0$, logo, de (1), (8), (12) e (13), tem-se :

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 3 & -7 & -15 & a_4 \\ \hline -3 & 1 & 0 & -7 & 6 & \boxed{-18 + a_4 = 0} \end{array} \quad ,$$

isto é : $\boxed{a_4 = 18}$

RESPOSTA: $P(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 15x + 18$

2ª QUESTÃO - ITEM I

Valor 0,8

ENUNCIADO: Sejam F , G , e H funções reais de variável real, tais que :

i) $F = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \ \text{e}\ y = +\sqrt{x+1}\}$

ii) para cada $x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$: $G(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$

iii) H (x) = F (G(x)), isto é, H é a função composta de F e G.

Determinar a coleção de argumentos (domínio) da função derivada de H.

OBSERVAÇÃO: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

SOLUÇÃO: Tem-se :

$$H(x) = F(G(x)) = \sqrt{G(x)+1} = \begin{cases} \sqrt{\ln x + 1} & , x > 1 \\ 0 & , x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

De (1), segue-se que H é derivável no seu domínio, isto é, no conjunto : $(-\infty ; 1) \cup (1 ; +\infty)$

RESPOSTA: $(-\infty ; 1) \cup (1 ; +\infty)$

2ª QUESTÃO - ITEM 2

Valor 0,8

ENUNCIADO: Sendo f e g funções reais de variável real, tais que:

i) $f(x) = \begin{cases} g(x)\ \text{sen}\ 1/x\ , & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ii) g é derivável em $x = 0$ e $g(0) = g'(0) = 0$

Calcular $f'(0)$.

SOLUÇÃO: Tem-se :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)\ \text{sen}\ 1/x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \text{sen}\ 1/x \quad \ldots \quad (1)$$

Porém, de ii) , segue-se :

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = 0 \ \ldots \ (2)$$

Quando uma função tende a zero em um dado ponto, e uma outra é limitada nesse ponto, a função produto tende a zero no ponto.

Daí e de (1) e (2), conclui-se que :

RESPOSTA: $f'(0) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{g(x)}{x}\ \text{sen}\ 1/x \right] = 0$

2ª QUESTÃO - ITEM 3

Valor 0,8

ENUNCIADO: Para cada número real r, seja $\widehat{r}$ o arco de r grados.

Calcular:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} \widehat{x} - \operatorname{sen} \widehat{\pi}}{x - \pi}$$

SOLUÇÃO: Tem-se :

$$\frac{\operatorname{sen} \widehat{x} - \operatorname{sen} \widehat{\pi}}{x - \pi} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\widehat{x} - \widehat{\pi}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{x} + \widehat{\pi}}{2}}{x - \pi} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\widehat{x} - \widehat{\pi}}{2}}{\frac{x - \pi}{2}} \cdot \cos \frac{\widehat{x} + \widehat{\pi}}{2} \quad (1)$$

Para cada número real Z seja $\breve{Z}$ o arco de Z radianos. Então :

$$\widehat{r} = \breve{z} \Longrightarrow r = \frac{200}{\pi} z \quad (2)$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} \breve{z}}{z} = 1 \quad (3)$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{sen} \widehat{r}}{r} = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} \breve{z}}{\frac{200}{\pi} z} = \frac{\pi}{200} \quad (4)$$

De (1) e (4), tem-se :

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} \widehat{x} - \operatorname{sen} \widehat{\pi}}{x - \pi} = \frac{\pi}{200} \cos \widehat{\pi}$$

RESPOSTA: $\frac{\pi}{200} \cos \widehat{\pi}$

2ª QUESTÃO - ITEM 4

Valor 0,8

ENUNCIADO: Determinar os valores de a para que a função

$$f(x) = x^{\frac{a^2 - a + 4}{3}} \cdot \left[(x^2 + 1)^{1/3} - x^{2/3} \right]$$

tenha limite :

i) finito;

ii) nulo ;

iii) infinito,

quando $x \longrightarrow +\infty$.

SOLUÇÃO: Tem-se :

$$f(x) = \frac{x^{\frac{\alpha^2 - \alpha + 4}{3}} (x^2 + 1 - x^2)}{(x^2+1)^{2/3} + x^{2/3} (x^2+1)^{1/3} + x^{4/3}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{\alpha^2 - \alpha + 4}{3}}}{x^{4/3} \left[(1+\frac{1}{x^2})^{2/3} + (1+\frac{1}{x^2})^{1/3} + 1 \right]} = \frac{x^{\frac{\alpha^2 - \alpha}{3}}}{(1+\frac{1}{x^2})^{2/3} + (1+\frac{1}{x^2})^{1/3} + 1}, \ x \neq 0$$

Então: $\lim\limits_{x \to +\infty} t(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{\alpha^2 - \alpha}{3}}$ e :

$\alpha^2 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in \{0, 1\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\alpha^2 - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in (0, 1) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\alpha^2 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty ; 0) \cup (1 ; +\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, logo:

RESPOSTA: i) $\alpha \in [0;1]$

ii) $\alpha \in (0;1)$

iii) $\alpha \in (-\infty ; 0) \cup (1; +\infty)$

2ª QUESTÃO - ITEM 5

Valor 0,8

ENUNCIADO: Sejam c_0, c_1, c_2, c_3 números reais. Calcular S, sendo:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3}{n!}$$

SOLUÇÃO: Tem-se:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_1 n}{n!} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_2 n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_3 n^3}{n!} \qquad (1)$$

onde:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{n!} = c_0 \qquad ; \qquad (2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_1 n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_1 \frac{1}{(n-1)} = c_1 \qquad ; \qquad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_2 n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_2 n^2}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_2 \frac{n}{(n-1)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_2 m + 1}{m!} = c_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} + c_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = 2\,c_2 \qquad ; \qquad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_3 n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_3 n^3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_3\, n^2}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} c_3 \frac{(m+1)^2}{m!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_3 m^2 + 2c_3 m + c_3}{m!} = 2c_3\, e + 2c_3\, e \cdot + c_3\, e =$$

$$= 5c_3\, e \qquad \ldots \qquad (5)$$

De (1), (2), (3), (4) e (5), segue-se :

RESPOSTA: $S = e(c_0 + c_1 + 2c_2 + 5c_3)$

2ª QUESTÃO - ITEM 6

Valor 0,8

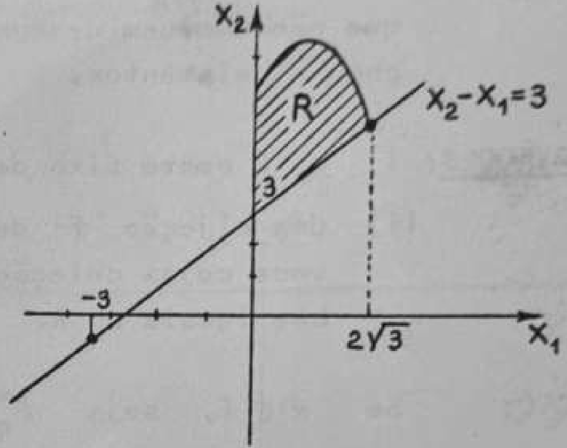
ENUNCIADO: Seja R a região dos pontos (x_1, x_2) do plano, delimitada pelas inequações:

$x_1^2 - 4x_1 + 4x_2 - 24 < 0$

$x_2 - x_1 - 3 > 0$

$x_1 > 0$

$x_2 > 0$



Calcular a área de R.

SOLUÇÃO: Tem-se :

$$R = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 - 4x_1 + 4x_2 - 24 < 0 \quad e \quad x_2 - x_1 - 3 > 0 \,,\ x_1 > 0 \,,\ x_2 > 0\}$$

$$x_1^2 - 4x_1 + 4x_1 + 12 - 24 = 0 \Longrightarrow x_1 \in \{2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$$

$$A = \int_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{-x_1^2 + 4x_1 + 24}{4} - (x_1 + 3) \right) dx =$$

$$= 1/4 \int_0^{2\sqrt{3}} (-x_1^2 + 12)\, dx = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

RESPOSTA: $4\sqrt{3}$ unidades de área

3ª QUESTÃO - ITEM ÚNICO

Valor 1,0

ENUNCIADO: Seja A um conjunto e F a coleção das bijeções f de A sôbre A. Calcular o número total de funções de F que não admitem nenhum ponto fixo, supondo-se A finito com n elementos.

OBSERVAÇÕES: i) x é ponto fixo de f se e só se $f(x) = x$.

ii) Uma bijeção f de A sôbre A é uma função biunívoca cujas coleções de argumentos e valores são ambas iguais a A.

SOLUÇÃO: Se $x \in E$, seja P_m^{x} (resp.: $P_m^{\tilde{x}}$) o número de bijeções de E sôbre E para cada uma das quais x é (resp.: não é) ponto fixo - e anàlogamente para casos análogos, e sejam $a_1, \ldots, a_m$ os elementos de A.

Vê-se que:

$$P_m^{\tilde{a}_1} = P_m - P_m^{a_1} = m! - (m-1)!\ ;$$

Isto é :

$$P_m^{\tilde{a}_1} = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} (m-1)!$$

Admitamos que:

$$\text{(i)} \quad P_m^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (m-1)!$$

Mas como se constata

$$\text{(ii)} \quad P_m^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_k \tilde{a}_{k-1}} = P_m^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_k} - P_{m-1}^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_k}$$

Também ,

$$P_{m-1}^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \left[m-(i+1)\right]!$$

Daí, de (i) e (ii), constata-se, finalmente que

$$P_m^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_k \tilde{a}_{k+1}} = \sum_{i=o}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} (m-i)!$$

Concluí-se, então, que o número procurado é :

RESPOSTA: $\sum_{i=o}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)!$