PROVA DE ÁLGEBRA

IME 1970

1a. QUESTÃO - ITEM 1
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO:

$$C = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x).$$

Calcule C.

SOLUÇÃO:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$C = \lim_{x \to \pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x}\right) = 0$$

RESPOSTA: 0

1ª QUESTÃO - ITEM 2
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO:

$$D = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+2}$$

Calcule D.

SOLUÇÃO:

$$D = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1+3}{x-1}\right)^{(x-1)+3} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x-1}\right)^{(x-1)+3} \quad ; \quad y = x - 1$$

$$D = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{3}{y}\right)^{y+3} = \left[\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{3}{y}\right)^{y}\right]\left[\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{3}{y}\right)^{3}\right] =$$

$$= e^3 \cdot 1 = e^3$$

RESPOSTA: e^3

1ª QUESTÃO - ITEM 3
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO:

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Calcule E.

SOLUÇÃO:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1$$

RESPOSTA: 1

1ª QUESTÃO - ITEM 4
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Determinar os pontos de inflexão da Gaussiana

$$y = e^{-x^2}$$

OBS: e .... base dos logaritmos neperianos.

SOLUÇÃO:

$$y' = -2x\, e^{-x^2} \; ; \; y'' = 2x.2x\, e^{-x^2} - 2\, e^{-x^2} = 2\, e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

a 2a. derivada se anula em $\begin{cases} x' = 1/\sqrt{2} \\ x'' = -1/\sqrt{2} \end{cases}$

para $\begin{cases} x < \frac{1}{\sqrt{2}} \; \ldots \; y'' < 0 \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}} \; \ldots \; y'' > 0 \end{cases}$

Logo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é ponto de inflexão; devido à simetria

$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ também o é, então $P_1(1/\sqrt{2}\, ,\ e^{-0.5})$ e $P_2(-1/\sqrt{2},\ e^{-0,5})$

RESPOSTA: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, ,\ e^{-0,5}\right)$, e, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\, ,\ e^{-0,5}\right)$

$1^{\underline{a}}$ QUESTÃO: ITEM 5
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Uma bola é lançada na vertical, de encontro ao sólo, de uma altura h.
Cada vez que bate no sólo, ela sobe até a metade da altura de que caiu. Calcular o comprimento total percorrido pela bola em suas trajetórias, até atingir o repouso.

SOLUÇÃO:

O comprimento total será:

$$L = h + 2h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$S_n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1, \quad \text{logo } L = h + 2h$$

$$L = 3h$$

RESPOSTA: 3h

$1^{\underline{a}}$ QUESTÃO: ITEM 6
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Sendo, $A^8_{n+1} = A^7_n + yA^6_n$

e n 7, determinar y em função de n.
OBS: n é inteiro positivo.

SOLUÇÃO:

$$\frac{(n+1)!}{(n-7)!} = \frac{n!}{(n-7)!} + y\frac{n!}{(n-6)!}$$

$$n+1 = y\frac{(n-7)!}{(n-6)!} + 1$$

$$n = y\frac{1}{n-6}; \qquad y = n(n-6)$$

RESPOSTA:

n(n-6)

1ª QUESTÃO: ITEM 7
(valor 0,4)

ENUNCIADO: Dada a curva

$$4x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

determine as equações das retas tangentes a esta curva que contém o ponto $(-3, -2)$.

SOLUÇÃO:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1, \text{ elipse,} \quad b = 2, \quad a = 1$$

$$4x^2 + y^2 = 4$$

Tangente: $4x_1x + y_1y = 4 \Longrightarrow \begin{cases} -12x_1 - 2y_1 = 4 \\ 4x_1^2 + y_1^2 = 4 \end{cases}$

$$y_1 = -2 - 6x_1$$

$$4x_1^2 + (-2-6x_1)^2 = 4$$

$$4x_1^2 + (-2-6x_1)^2 = 4$$

$$4x_1^2 + \cancel{4} + 36x_1^2 + 24x_1 = \cancel{4} \Longrightarrow x_1(5x_1 + 3) = 0$$

$$x_1' = -\frac{3}{5} \;;\quad y_1' = 8/5 \;;\quad x_1'' = 0 \;;\quad y_1'' = -2$$

$$R_1' \ldots\ 4\left(-\frac{3}{5}\right)x + \frac{8}{5}y = 4 \Longrightarrow -12x + 8y - 20 = 0$$

$$R_1'' \ldots\ 4(0)x + (-2)y = 4 \Longrightarrow y + 2 = 0$$

RESPOSTA:

$y+2=0$, e, $-12x + 8y = 20$

1ª QUESTÃO: ITEM 8
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Estabeleça as equações das retas que distam 10 (dez) unidades da origem e que contém o ponto (5, 10).

SOLUÇÃO:

Escrevendo sob a forma

$$x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - d = 0$$

$$5 \cos \omega + 10 \operatorname{sen} \omega - 10 = 0$$

$$\cos \omega = 2(1 - \operatorname{sen} \omega)$$

$$\cos^2 \omega = 4 - 8 \operatorname{sen} \omega + 4 \operatorname{sen}^2 \omega$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 \omega = 4 - 8 \operatorname{sen} \omega + 4 \operatorname{sen}^2 \omega$$

$$5 \operatorname{sen}^2 \omega - 8 \operatorname{sen} \omega - 3 = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \omega = 1 \\ \cos \omega = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen} \omega = 3/5 \\ \cos \omega = 4/5 \end{cases}$$

Logo: $\begin{cases} 4x + 3y = 50 \\ y = 10 \end{cases}$

RESPOSTA:

$4x + 3y = 50$

$y = 10$

1ª QUESTÃO: ITEM 9
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Dado o sistema de equações abaixo

$$x + ay + a^2 z = k^2$$

$$\frac{x}{a} + y + bz = k^2$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = k^2$$

onde a, b, $k \neq 0$, pedem-se os valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$, que tornem o sistema indeterminado.

SOLUÇÃO:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/2 & 1 & b \\ 1/a^2 & 1/b & 1 \end{vmatrix} = b/a + a/b - 2$$

$$\Delta = 0 \Longrightarrow b/a + a/b - 2 = (a-b)^2 = 0$$

Se, $a=b \Longrightarrow$ Sistema determinado

Se, $a=b \neq 1 \Longrightarrow$ " incompatível

Se, $a=b = 1 \Longrightarrow$ " indeterminado

RESPOSTA:

$a = 1$; $b = 1$

$1^{\underline{a}}$ QUESTÃO: ITEM 10
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule o valor do determinante de ordem n abaixo, em função de a e n.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

SOLUÇÃO:

1) Somar à 1a. linha tôdas as demais

$$\begin{vmatrix} a+(n-1) & a+(n-1) & a+(n-1) & \cdots & a+(n-1) \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

2) Colocar em evidência o fator constante da $1^{\underline{a}}$ linha

$$\left[a+(n-1)\right] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

3) Subtrair a $1^{\underline{a}}$ linha das demais

$$\left[a+(n-1)\right] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

1ª QUESTÃO - ITEM 10
(Valor 0, 4)

SOLUÇÃO (continuação)

4) O determinante reduz-se à diagonal principal

$$\left[a + (n-1)\right] \quad (a-1)^{(n-1)}$$

RESPOSTA:

$$(a+n-1)(a-1)^{(n-1)}$$

2ª QUESTÃO: ITEM 11
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Dada a equação $x - \cos(xy) = 0$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

SOLUÇÃO:

$$1 + \text{sen}(xy)\left[xy' + y\right] = 0$$

$$1 + xy' \text{ sen } (xy) + y \text{ sen } (xy) = 0$$

$$y' = - \frac{1 + y \text{ sen}(xy)}{x \text{ sen } (xy)}$$

RESPOSTA: Nenhuma das respostas acima.

2ª QUESTÃO: ITEM 12
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Determine quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5.
OBS: Considere os números iniciados com o algarismo 0 (por exemplo, 0123), números de 3 algarismos.

SOLUÇÃO:

$$N = A_6^4 - A_5^3 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 - 5 \times 4 \times 3 = 300$$

RESPOSTA: 300.

2ª QUESTÃO: ITEM 13
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Determine as assíntotas da curva $y = x + 2 - \frac{3}{x}$

SOLUÇÃO:

- Assíntota vertical

$$\begin{cases} x \longrightarrow 0^-, & y \longrightarrow +\infty \\ x \longrightarrow 0^+, & y \longrightarrow -\infty \end{cases} \Longrightarrow x = 0 \text{ é assíntota vertical.}$$

- Assíntota inclinada

$$y = ax + b \quad \begin{cases} a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y/x) \\ b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (y - x) \end{cases}$$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + 2 - \frac{3}{x} - x\right) = 2$$

$\boxed{y = x + 2}$ é assíntota inclinada.

RESPOSTA:

$x = 0$, e, $y = x + 2$.

2ª QUESTÃO: ITEM 14
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO:

$$F = \sqrt{-15 - 81}$$

. Calcule F, escrevendo a resposta sob a forma a + bi, com a e b inteiros.

OBS: $i = \sqrt{-1}$

SOLUÇÃO:

$$\sqrt{-15 - 8i} = \sqrt{(x + iy)^2} = Z = x + iy$$

$$-15 - 8i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2\,xy = -8 \Longrightarrow y = -\dfrac{4}{x} \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{16}{x^2} = -15$$

$$x^4 + 15\,x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{2} = \frac{-15 \pm 17}{2} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ x = -16 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \pm \Longrightarrow y_{1,2} = \mp 4$$

$$\begin{cases} F = 1 - 4i \\ F = -1 + 4i \end{cases}$$

RESPOSTA:

$-4i + 1$, e, $-1 + 4i$

$2^{\underline{a}}$ QUESTÃO: ITEM 15
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Determine os pontos do plano complexo que satisfazem simultâneamente às equações

$$|z-2| = |z+4|$$

$$|z-3| + |z+3| = 10$$

OBS: $|z|$ ... módulo de z.

SOLUÇÃO:

Escrevendo as equações sob a forma cartesiana;

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2$$

$$\boxed{x = -1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + (x+3)^2 + y^2$$

$$3x + 25 = 5 \quad (x+3)^2 + y^2$$

$$9x^2 + 150x + 625 = 25\,(x^2 + 6x + y^2 + 9)$$

$$16x^2 + 25y^2 = 40 \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Levando (1) em (2) vem $y = \pm\ 8/5 \quad 6$

RESPOSTA.

$x = -1$; $y = \pm\ 8/5\sqrt{6}$

2ª QUESTÃO: ITEM 16
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: As três raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ são a, b, c. Se, $S_n = a^n + b^n + c^n$, com $\underline{n}$ inteiro e $n > 3$, calcule $\underline{K}$, sendo

$$K = S_n + pS_{n-1} + q\,S_{n-2} + rS_{n-3}$$

SOLUÇÃO:

Multiplicando a equação por x^{n-3} $(n \geq 3)$,

$$x^n + pn^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} = 0\ ;$$ a, b, c são raizes desta equação.

$$a^n + pa^{n-1} + q\,a^{n-2} + r\,a^{n-3} = 0$$

$$C^n + pC^{n-1} + q\,C^{n-2} + r\,b^{n-3} = 0$$

$$c^n + pc^{n-1} + q\,c^{n-2} + r\,c^{n-3} = 0$$

Somando estas equações

$$a^n + C^n + c^n + p(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) + q(a^{n-2} + C^{n-2} + c^{n-2}) +$$

$$+ r(a^{n-3} + C^{n-3} + c^{n-3}) = 0$$ Logo

$$S_n + p\,S_{n-1} + q\,S_{n-2} + r\,S_{n-3} = 0$$

RESPOSTA:

0

2ª QUESTÃO: ITEM 17
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule as raízes da equação

$$2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0 \quad ,$$

sabendo-que uma das raízes é real, da forma n/d, sendo n e d, inteiros, positivos e primos entre si.

SOLUÇÃO:

d será divisor de 2, logo é 2. Façamos y=2x, para obter uma transformada com raiz inteira. A transformada em y será:

$$y^3 - 7y^2 + 20y - 24 = 0$$

A raiz inteira será y=n, então n terá que ser divisor de 24 e primo com 2.

Logo y=3 e x=y/2 = 3/2. Dividindo a equação por x-3/2 obtemos $2x^2 - 4x + 4$ que nos dá as outras raizes, isto é, $1 \pm i$.

RESPOSTA:

$3/2$; $1 \pm i$

2ª QUESTÃO: ITEM 18
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Sabendo que a equação $x^3 + mx^2 + n = 0$, em que $\underline{m}$ e $\underline{n}$ são reais, admite raízes complexas de módulo β, exprima $\underline{m}$ em função de $\underline{n}$ e β.

SOLUÇÃO:

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raizes procuradas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -m \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 = -n \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \beta(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \\ x_2 = \beta(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + \beta(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) + x_3 = -m \\ \beta^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + \beta x_3(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) + \beta x_3(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta) = 0 \\ \beta^2 x_3(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = -n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\beta\cos\theta + x_3 = -m \\ \beta^2 + 2\beta x_3 \cos\theta = 0 \\ \beta^2 x_3 = -n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\beta^2/x_3 + x_3 = -m \\ \beta^2 x_3 = -n \end{cases}$$

$$\beta^2 \quad \frac{\beta^2}{n} - \frac{n}{\beta^2} = -m \Longrightarrow m = \frac{n^2 - \beta^6}{n\beta^2}$$

RESPOSTA:

$$m = \frac{n^2 - \beta^6}{n\beta^2}$$

2ª QUESTÃO ITEM 1º
(Valor 0,4)

ENUNCIADO: Calcule o coeficiente de x^6 no desenvolvimento

$$(1 + x + x^2)^5$$

SOLUÇÃO: O têrmo geral do desenvolvimento $(1+x+x^2)^5$ é

$$\frac{m!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}\ x^{(\beta+2\gamma)}$$

onde α, β e γ são os expoentes dos têrmos (1), (x) e (x^2). Então para o têrmo em x^6 vem:

$$\beta + 2\gamma = 6 \qquad (1)$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 5 \qquad (2)$$

De (1)

$\beta = 6 - 2\gamma$ (3) e de (2) e (3) vem $\alpha = \gamma - 1$ (4).

Como α, β e γ são inteiros positivos ou zeros, de (3) vem $\gamma \leq 3$ e de (4) vem $\alpha \leq 2$.

Façamos o quadro

α	β	γ
0	4	1
1	2	2
2	0	3

$$\frac{5!}{0!\ 4!\ 1!} + \frac{5!}{1!\ 2!\ 2!} + \frac{5!}{2!\ 0!\ 3!} = 45$$

RESPOSTA:

45

2ª QUESTÃO _ ITEM 20
(Valor 0,4)

ENUNCIADO: De um disco com raio $R = \frac{1}{2\pi}$ retire um setor cujo arco é $\underline{x}$. Com o restante do disco forme um cone. Calcule o valor de $\underline{x}$ para que o volume do cone seja máximo.

OBS: $V = \frac{1}{3}$ Bh, sendo B a área da base e h a altura do cone.

SOLUÇÃO:

r = raio da base do cone

$$2\pi r = 2\pi R - x \Longrightarrow r = \frac{1-x}{2\pi}$$

B = área da base

$$B = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(1-x)^2}{4\pi}$$

h = altura do cone

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} - \left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2}$$

$$h = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1-(1-x)^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2x - x^2}$$

$$h = \frac{1}{2\pi} (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{1}{3} \text{ Bh}$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{(1-x^2)^2}{4\pi} \times \frac{1}{2\pi} (2x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{1}{24\pi^2} (1-x^2)^2 \; (2x - x^2)^{1/2}$$

2ª QUESTÃO: ITEM 20

SOLUÇÃO(continuação)

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{24\pi^2}\left[-2(1-x)(2x-x^2)^{1/2} + (1-x^2)^2 \frac{1}{2}(2x-x^2)^{1/2}(2-2x)\right] =$$

$$= (1-x)\left[2(x^2-2x) + (1-x)\frac{1}{2}(2-2x)\right] =$$

$$= (1-x)(3x^2 - 6x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + \sqrt{2/3} \\ x_3 = 1 - \sqrt{2/3} \end{cases}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 6x - 6 \quad \text{é negativo para } x < 1$$

Logo o máximo é $x_3 = 1 - \sqrt{2/3}$

pois para $x = 1$; $V = 0$.

RESPOSTA:

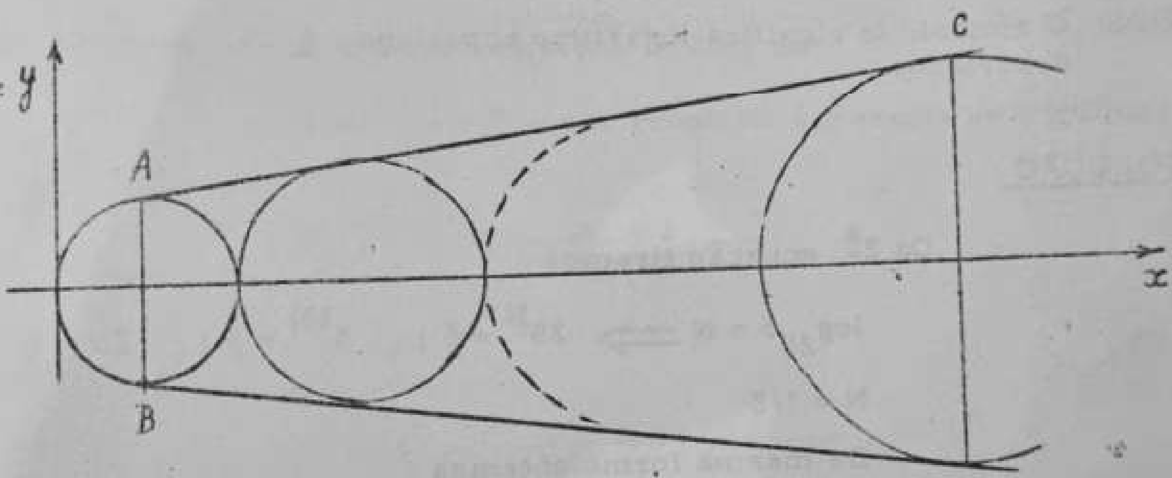
$1 - \sqrt{2/3}$

3ª QUESTÃO: ITEM 21
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Na figura abaixo, temos $\underline{n}$ círculos consecutivos e tangentes, cujos diâmetros estão em progressão aritmética de razão 1 e os centros sôbre o eixo dos $\underline{x}$. Seja ABCD um trapézio cujas bases $\overline{AB} = 2$ e $\overline{CD}$ são respectivamente os diâmetros do primeiro e do enegésimo círculo. Calcule a área de ABCD em função de $\underline{n}$.

OBS: Área do trapézio = $\frac{\text{(Base maior) + (Base menor)}}{2}$ x altura

SOLUÇÃO:



Sejam $\underline{S}$ a área e $\underline{h}$ a altura do trapézio.

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times h \quad ; \quad \overline{AB} = 2$$

$\overline{CD}$ é o têrmo m de uma P. A. de razão igual a 1.

$$\overline{CD} = 2 + (n-1) = n + 1$$

$\underline{h}$ é a soma dos $\underline{n}$ têrmos da P. A. menos metade do 1º termo e menos metade do último têrmo.

Então: $$h = \frac{n}{2}(2+n+1) - \frac{1}{2}(2+n+1) - \frac{1}{2}(2+n+1) =$$
$$= \frac{1}{2}(n-1)(2+n+1) = \frac{1}{2}(n^2+2n-3)$$

Logo $$S = (2+n+1)\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(n^2 + 2n - 3) = \frac{1}{4}(n^3+5n^2+3n-9)$$

RESPOSTA: $1/4\ (n^3+5n^2+3n-9)$

3ª QUESTÃO: ITEM 22
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Calcule os valores de X e Y sabendo que:

$$X > Y$$

$$\log_5 (X+Y) - 2 \log_{25} 5 = 0$$

$$5^{\log_5 (X+Y)} + \text{anti-ln}\left(\frac{\log_3 XY}{\log_3 e}\right) + \text{colog}_5 (X+Y) - 5 \log_3 9 = 0$$

OBS: O símbolo ln significa logaritmo neperiano: e ... base dos logaritmos neperianos.

SOLUÇÃO:

Da 2ª equação tiramos

$$\log_{25} 5 = N \Longrightarrow 25^N = 5 \; ; \quad 5^{2N} = 5 \; ; \quad 2N = 1$$

$N = 1/2$

Da mesma forma obtemos

$$\log_5 (X + Y) = 2N$$

$$\log_5 (X + Y) = 1$$

$$X + Y = 5$$

Da 3ª equação tiramos

$$5^{\log_5 (X+Y)} = X + Y = 5$$

$$\text{anti-ln}\left(\frac{\log_3 XY}{\log_3 e}\right) = \text{anti-ln}\,(\ln XY) = XY$$

$$\text{Colog}_5 (X+Y) = -\log_5 (X+Y) = -1$$

$$\log_3 9 = N \Longrightarrow 3^N = 9 \; ; \quad 3^N = 3^2 \Longrightarrow N = 2$$

$$5 \log_3 9 = 5 \times 2 = 10$$

A 3ª equação então reduz-se a

$$5 + XY - 1 - 10 = 0 \Longrightarrow XY = 11 - 5 = 6$$

3ª QUESTÃO: ITEM 22

SOLUÇÃO (Continuação)

Arma-se o sistema

$$X + Y = 5$$

$$XY = 6$$

O sistema fornece a equação do 2º grau

$X^2 - 5X + 6 = 0$, que resolvida apresenta as seguintes raízes:

$$X_1 = 3 \quad e \quad X_2 = 2$$

como $X > Y$, $X = 3$ e $Y = 2$

RESPOSTA:

$X = 3$ e $Y = 2$

3ª QUESTÃO: ITEM 23
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO:

$$G = \lim_{n \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

Calcule G.

SOLUÇÃO:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

$$1^3 = 1 \quad \ldots \quad k = 0$$

$$2^3 - 1^3 = 3.\,1^2 + 3.\,1 + 1 \quad \ldots \quad k = 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3.\,2^2 + 3.\,2 + 1 \quad \ldots \quad k = 2$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3.\,n^2 + 3n + 1 \quad \ldots \quad k = n$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + (n+1)$$

$$(n+1)^3 = 3(1 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + \ldots + n^2) + \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$3(1^2 + \ldots + n^2) = (n+1)^3 - \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

$$3(1^2 + \ldots + n^2) = \frac{(n+1) \quad 2(n+1)^2 - (3n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2}$$

$$1^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$$

$$G = \lim_{n \to \infty} \frac{2/6 n^3 + \ldots}{n^3} = 2/6 = 1/3$$

RESPOSTA:

1/3

3ª QUESTÃO: ITEM 24
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Uma cônica tem por equação

$$9y^2 - 18y + 25x^2 + 50x - 191 = 0.$$

Identifique-a e calcule sua excentricidade, se fôr o caso.

SOLUÇÃO:

$$9(y^2 - 2y+1) - 9 + 25\,(x^2 + 2x + 1) - 25 = 191$$

$$9(y-1)^2 + 25\,(x+1)^2 = 225$$

$$\frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$

Elipse:

$$\text{eixos}\ \begin{cases} y = +9 \\ x = -1 \end{cases}$$

semi-eixo maior $\Longrightarrow$ $C = 5$

semi-eixo menor $\Longrightarrow$ $c = 3$

$$\text{excentricidade} = \frac{\sqrt{C^2 - c^2}}{C} = \frac{4}{5} = 0,8$$

RESPOSTA:

Uma elipse de excentricidade 0, 8

$3^{\underline{a}}$ QUESTÃO: ITEM 25
(Valor 0, 4)

ENUNCIADO: Seja
$$A = (\sqrt{3} + i)^{2\alpha}$$
onde α é um número r al, inteiro e positivo. Sendo A um número real, calcule o valor de α para que as raízes da equação
$$(\alpha + i)^2 x + (3 + i)^2 y = 0$$
sejam também reais.
OBS: $i = \sqrt{-1}$.

SOLUÇÃO:

$$(\sqrt{3} + i)^{2\alpha} = 2^{2\alpha} \left(\cos \frac{\pi 2\alpha}{6} + i \text{ sen } \pi/6 \; 2\alpha\right)$$

$$\text{sen } 2\pi/6\,\alpha = 0 \Longrightarrow 2\pi/6\,\alpha = K\pi \quad \boxed{\alpha = 6/2\,K}$$

$$K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \Longrightarrow \alpha = 0,\ 3,\ 6,\ \ldots$$

$$(\alpha^2 + 2\alpha i - 1)x + (9 + 6i - 1)\,y = 0$$

$$\left[(\alpha^2 - 1)x + 8y\right] + i\left[2\alpha x + 6y\right] = 0$$

$$(\alpha^2 - 1)x + 8y = 0$$

$$2\alpha x + 6y = 0$$ para que o sistema seja compatível:

$$\begin{vmatrix} (\alpha^2 - 1) & 8 \\ 2\alpha & 6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3\alpha^2 - 8\alpha - 3 = 0$$

RESPOSTA:

$$\boxed{\alpha = \begin{cases} 3 \\ -1/3 \end{cases}}$$

Nenhuma das respostas acima.