ÍNDICE DE NOTAÇÕES

$\forall x$: - qualquer que seja x

$\exists x$: - existe x

$x \in A$: - x pertence à A

$A \subset B$: - A é subconjunto de B

$A \cup B$: - A união B

$A \cap B$: - A interseção B

$A - B$: - A menos B

$A \times B$: - A cartesiano B

$n(A)$: - nº de elementos do conjunto A

A / R: - conjunto cociente de A por R

$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais

$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

C = conjunto dos números complexos

$\sup A$ = supremo do conjunto A

$\inf A$ = ínfimo do conjunto A

$f: A \to B$ - função de A em B

$\lim_{x \to x_0} f$: - limite

$\lim_{x \to x_0^+} f$: - limite à direita

$\lim_{x \to x_0^-} f$: - limite à esquerda

f': - derivada primeira de f

$f^{(n)}$: - derivada de ordem n de f

$a = (a_n)$: - sequência, sucessão

$u = \sum u_n$: - série de têrmo geral u_n

$)y($ = maior inteiro menor ou igual a y

$|y|$ = módulo de y

$\ln x$ = logarítmo neperiano de x

$\log_b x$ = logarítmo de x na base $\underline{b}$

$P(a,b)$ = ponto P de coordenadas $\underline{a}$ e $\underline{b}$

(a,b) = máximo divisor comum entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$; intervalo aberto, par ordenado

$\det A$ = determinante da matriz A

1a. QUESTÃO - ÍTEM 1 (0,5 pontos)

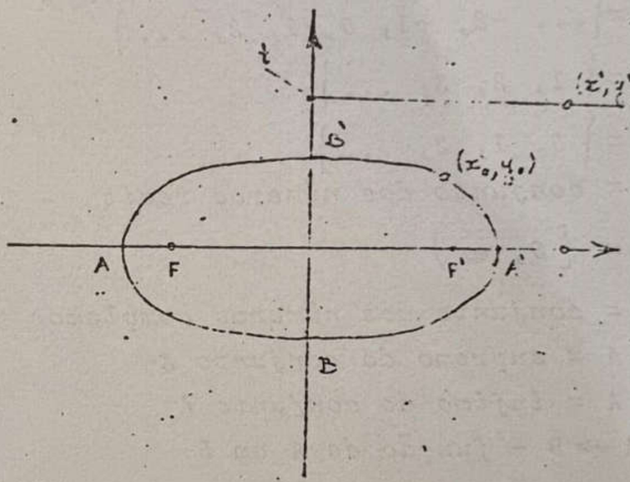
ENUNCIADO: Seja E a elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e t uma tangente variável. Sejam $M(x', 0)$ e $N(0, y')$ as interseções de t com os eixos coordenados $0x$ e $0y$, respectivamente. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico descrito pelo ponto $P(x', y')$ e esboce o seu gráfico.

i Equação de t:

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1 \quad ,$$



ii Determinação de x' e y':

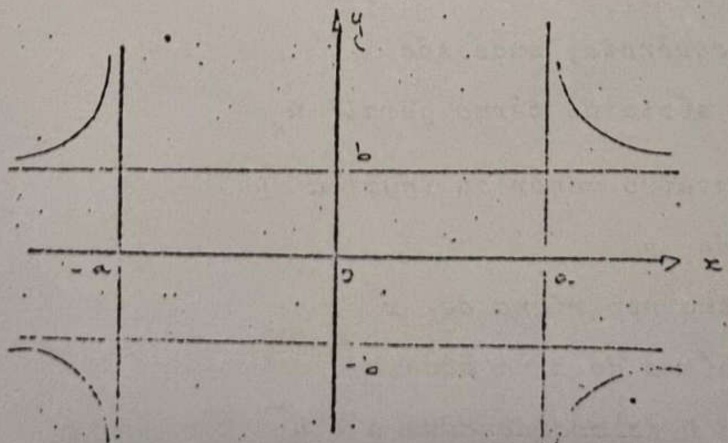
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = b^2/y_0$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = a^2/x_0$$

Porém $(x_0, y_0) \in E$; daí

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a^2}{x'^2} + \frac{b^2}{y'^2} = 1}$$

iii Gráfico:



1a. QUESTÃO - ÍTEM 2 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Seja $m \in \mathbb{R}$, fixado, e

$$(k+1)^2\, y^2 + x^2 + 2(k-1)\, xy + mk^2 y = 0$$

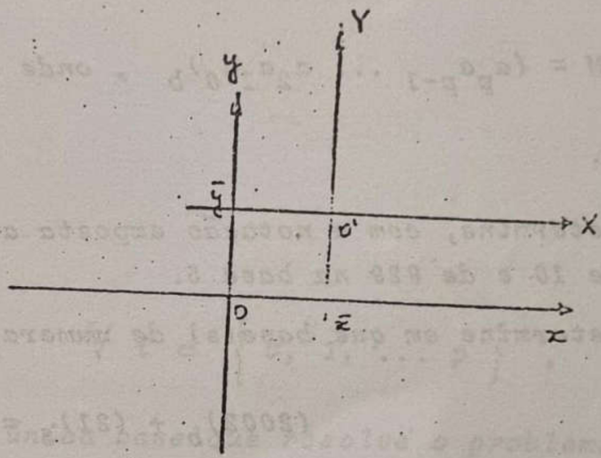
a equação cartesiana de uma família F de cônicas de parâmetro $\underline{k}$. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das cônicas da família F.

"Se uma cônica estiver desprovida de seus têrmos lineares, seu centro é a origem".

Façamos então a translação:

$$Y = y - \overline{y} \qquad (1)$$

$$X = x - \overline{x} \qquad (2)$$



Daí, levando

$$y = Y + \overline{y}$$

$$x = X + \overline{x}$$ na equação

de F e igualando a zero seus têrmos lineares, vem:

$$\begin{cases} \overline{x} + (k-1)\,\overline{y} = 0 \\ 2(k+1)^2\,\overline{y} + 2(k-1)\,\overline{x} + mk^2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem:

$$\overline{y} = \frac{-mk}{8} \quad \text{e} \quad \overline{x} = \frac{k(k-1)m}{8}$$

Eliminando $\underline{k}$ nas equações acima, vem:

$$\boxed{8\overline{y}^2 - m\overline{x} + m\overline{y} = 0}$$

2a. QUESTÃO - ÍTEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Sejam $b \in \mathbb{Z}_+$, $b > 1$ e $M \in \mathbb{N}$. Suponhamos M expresso sob a forma

$$\text{(I)} \qquad M = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \text{ , onde}$$

os coeficientes satisfazem a relação

$$0 \leq a_i \leq b - 1 \quad , \quad \forall\, i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$$

Dizemos, então, que a representação de M na base de numeração $\underline{b}$ é

$M = (a_p a_{p-1} \dots a_2 a_1 a_0)_b$, onde o índice $\underline{b}$ indica a base considerada.

a) Determine, com a notação exposta acima, a representação de 1347 na base 10 e de 929 na base 5.

b) Determine em que base(s) de numeração é verificada a igualdade

$$(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b$$

c) Mostre que se $M = (14641)_b$, então independentemente da base considerada, M é quadrado perfeito. Determine a representação de $\sqrt{M}$ na base $b + 1$ (b mais um).

d) Determine a representação de $M = (14654)_b$ na base $b + 1$ (b mais um).

a) De I, vem:

$$M = ((\dots(a_p b + a_{p-1})\, b + a_{p-2})\, b + \dots + a_0)$$

Daí para obtermos a_i, $i \in \{0, 1, \dots p\}$, basta "dividirmos M por b, o quociente obtido por b, e assim sucessivamente". Logo:

$$\begin{array}{l|l} 1347 & 10 \\ \hline \textcircled{7} & 134 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 134 & 10 \\ \hline \textcircled{4} & 13 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 13 & 10 \\ \hline \textcircled{3} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 1 & 10 \\ \hline \textcircled{1} & 0 \end{array}$$

$$\therefore \quad 1347 = (1347)_{10}$$

$$
\begin{array}{l}
929 \ \underline{|\ 5} \\
\ 4 \quad 185 \ \underline{|\ 5} \\
\qquad \ 0 \quad 37 \ \underline{|\ 5} \\
\qquad\qquad 2 \quad 7 \ \underline{|\ 5} \\
\qquad\qquad\quad 2 \quad 1 \ \underline{|\ 5} \\
\qquad\qquad\qquad 1 \quad 0.
\end{array}
\qquad \therefore \qquad 929 = (12204)_5
$$

b) Da equação proposta, segue-se que:

$$(2b^3 + 2) + (2.5 + 1) = (2b^2 + 2b) + (b^3 + b^2 + 2b + 1)$$

Daí, obtemos as raízes

$$b_1 = 3$$

$$b_2 = -2$$

$$b_3 = 2$$

Como $b > 1$ e $b > a_i \geqslant 0$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots p\}$,

segue-se que $\boxed{b_1 = 3}$ é a única base que resolve o problema.

c) $M = (14641)_b = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 = (b + 1)^4$

Daí, $\sqrt{M} = (b + 1)^2 = (b + 1)^2 + 0(b + 1) + 0 = (100)_{b+1}$

d) 1a. solução:

$$
\begin{aligned}
M = (14654)_b &= b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 5b + 4 = \\
&= b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 + (b + 1) + 2 \\
&= (b + 1)^4 + (b + 1) + 2 \\
&= (10012)_{b+1}
\end{aligned}
$$

2a. solução:

Fazendo a transformada aditiva $b \longrightarrow b + 1$, vem:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 4 & 6 & 5 & 4 \\
-1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
-1 & 1 & 2 & 1 & 1 & \\
-1 & 1 & 1 & 0 & & \\
\end{array}
\qquad \therefore \qquad M = (10012)_{b+1}
$$

2a. QUESTÃO - ITEM 2 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função exponencial se

$$f(x) = a^x \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \quad ,$$ onde $\underline{a}$ é uma constante real

estritamente positiva. Determine as funções exponenciais que satisfazem à equação

$$\text{(I)} \qquad 6f(x+5) + f(x+4) - 43f(x+3) - 43f(x+2) +$$
$$+ f(x+1) + 6f(x) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f(x+5) &= a^{x+5} \\ f(x+4) &= a^{x+4} \\ f(x+3) &= a^{x+3} \\ f(x+2) &= a^{x+2} \\ f(x+1) &= a^{x+1} \\ f(x) &= a^{x} \end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

II em I, fornece, após simplificação por $a^x\ (\neq 0)$,

$$6a^5 + a^4 - 43a^3 - 43a^2 + a + 6 = 0$$

$a_1 = -1$ é raiz

	6	1	-43	-43	1	6
-1	6	-5	-38	-5	6	0

equação recíproca:

$$y = a + \frac{1}{a} \ ;$$

$$y^2 = y - 2 \ .$$

$$6(y^2 - 2) - 5y - 38 = 0$$

$$\therefore \qquad y = \begin{cases} 10/3 & \to \quad a_2 = 3 \ ; \ a_3 = 1/3 \\ -5/2 & \to \quad a_4 = -2 \ ; \ a_5 = -1/2 \end{cases}$$

Como $a > 0$, as soluções possíveis são:

$$f(x) = 3^x \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{e}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \ .$$

5a. QUESTÃO - ÍTEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Prove, aplicando o Princípio da Indução, que se $n \in \mathbb{N}$, e $p \in \mathbb{Z}_+$ é um número primo, então

$$n^p - n \quad \text{é divisível por } p.$$

i $\quad n = 1$,

$$n^p - n = 0 \quad \Rightarrow \quad n^p - n \text{ é divisível por } p.$$

ii Hipótese de indução

$$n^p - n \quad \text{é divisível por } p, \text{ isto é,}$$

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \quad n^p - n = kp.$$

iii $(n + 1)^p - (n + 1) = n^p - n + (C_p^1\, n^{p-1} + C_p^2\, n^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}\, n)$

Porém, se $i \neq 0$ e $i \neq p$,

$C_p^i = \dfrac{p!}{(p - i)!\, i!}$ é divisível por p, uma vez que p é primo e $i!$ e $(p - i)!$ só possuem como fatores números menores do que p.

Daí, $C_p^1\, n^{p-1} + C_p^2\, n^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1}\, n$ é divisível por p;

então $\exists\, k' \in \mathbb{N}$ tal que

$(n + 1)^p - (n + 1) = kp + k'p = (k + k')\, p$.

Ou seja:

$$(n + 1)^p - (n + 1) \quad \text{é divisível por } p.$$

CQD

3a. QUESTÃO - ÍTEM 2 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Seja A um conjunto tal que $n(A) = p > 0$. Determinar justificando:

a) o número de relações reflexivas distintas em A.

b) o número de relações simétricas distintas em A.

c) o número de relações antisimétricas distintas em A.

a) Se R é reflexiva, então

$$\forall x \in A,\ (x, x) \quad R .$$

Daí, como $\#(A \times A) = p^2$ e existem p pares da forma (x, x), $x \quad R$,

$$\#\left\{(x,y) \in A \times A \;\middle|\; x \quad y\right\} = p^2 - p .$$

Logo, o número de relações reflexivas é igual a 2^{p^2-p} .

b) Se R é simétrica, então,

$$\forall x, y \in A,\ (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R .$$

Daí, observamos que se $x \neq y$, os pares (x, y) e (y, x), só ocorrerão simultâneamente. Em consequência, o número pedido é

$$2^{(p^2-p)/2 + p} = 2^{(p^2+p)/2}$$

c) Se R é antisimétrica, então

$$\forall x, y \in A,\ (x, y) \in R \text{ e } (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

Daí, para os pares da forma (x, y), com $x \neq y$, podem ocorrer as seguintes hipóteses:

i $\quad x R y$ e $y \not R x$

ii $\quad x \not R y$ e $y R x$

iii $\quad x \not R y$ e $y \not R x$

Daí, o número de maneiras em que tais pares podem ocorrer em R é

$$3^{(p^2-p)/2} .$$

Por outro lado, os pares da forma (x, x), podem ocorrer ou nã 259
R. Daí o número de maneiras é

$$2^p .$$

Logo o número de relações antisimétricas é

$$2^p \cdot 3^{(p^2-p)/2}$$

4a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{i=\,]x[}^{i=\infty} \frac{x}{a^i}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$, onde $a > 1$ é uma

constante fixada. Determine, justificando:

a) Os pontos de descontinuidade de f.
b) O domínio da função f', derivada de f.
c) $\lim_{x \to \infty} f.$

$$f(x) = \frac{x}{a^i} + \frac{x}{a^{i+1}} + \frac{x}{a^{i+2}} + \ldots = \frac{x}{a^i}\left[1 + \frac{1}{a} + \ldots\right],$$

onde $i = \,]x[$. Daí,

$$f(x) = \frac{x}{a^{]x[}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{x}{a^{]x[}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

a) i Seja $x \in \mathbb{Z}$

Daí, $f(x^+) = \dfrac{x}{a^{|x|}} \cdot \dfrac{a}{a-1}$

$$f(x^-) = \frac{x}{a^{|x-1|}} \cdot \frac{a}{a-1}$$

Daí, $f(x^+) = f(x^-)$ sss $x = 0$.

Então f é descontínua em $\mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z}^*$.

<u>ii</u> Seja $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Então f é contínua como quociente de duas funções contínuas, a saber:

$$g(x) = \frac{a}{a-1} \cdot x, \quad \forall x \quad \mathbb{R}, \quad e$$

$h(x) = a^{]]x[[}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (compostas de funções contínuas ...).

Conclusão: f é descontínua em $\mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z}^*$.

b) <u>i</u> f não é derivável em $\mathbb{Z}^*$ (por não ser contínua)

<u>ii</u> Se $x = 0$,

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1}{a^{]]x[[}} = \frac{a}{a-1}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1}{a^{]]x[[}} = \frac{1}{a-1}$$

<u>iii</u> Se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$,

$$f'(x^+) = f'(x^-) = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1}{a^{]]x[[}}$$

Daí, $D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

c) Se $x > 0$, $x - 1 <]]x[[< x$. Como $a > 1$, vem:

$$a^{x-1} \leq a^{]]x[[} < a^x \quad , \text{ daí}$$

$$\frac{x}{a^{x-1}} > \frac{x}{a^{x-1}} \cdot \frac{x}{a^{x}} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Porém, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{a^{x-1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{a^{x}} = 0$ (L'Hôpital)

Daí, pelo teorema do confronto, segue-se que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{a}{a-1} \cdot 0 = 0$$

5a. QUESTÃO - ÍTEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Seja $A = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right] \quad , \quad \forall x \in A$$

Mostre que se $f^{(n)}$ designa a derivada de ordem n de f, então podemos expressá-la sob a forma

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1}}, \text{ onde } P_n \text{ é um polinômio de grau}$$

n. Determine tôdas as raízes de P_n.

i Determinação de P_n.

$$\left[\frac{1}{(x-1)}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n\,!}{(x-1)^{n+1}} \quad ; \quad \left[\frac{1}{(x+1)}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n\,!}{(x+1)^{n+1}}$$

Daí,

$$f^{(n)}(x) = \frac{\dfrac{(-1)^n\, n!}{2}\left[(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}\right]}{(x^2-1)^{n+1}}$$

Então

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{2} \cdot \left[(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} \right]$$

possui òbviamente grau $\underline{n}$.

<u>ii</u> Determinação das raizes de P_n.

$$P_n(x) = 0 \iff (x+1)^{n+1} = (x-1)^{n+1}$$

Como $x \neq 1$,

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1} = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \text{cis}\,\frac{2k\pi}{n+1}, \quad k \in \{1, 2, ..$$

$$\therefore \quad x = \frac{\text{cis}\,\theta + 1}{\text{cis}\,\theta - 1}, \quad \text{com} \quad \theta = \frac{2k\pi}{n+1}.$$

$$\frac{\text{cis}\,\theta + 1}{\text{cis}\,\theta - 1} = \frac{(\cos\theta + 1) + i\,\text{sen}\,\theta}{(\cos\theta - 1) + i\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{+\,2\cos^2\theta/2 + 2i\,\text{sen}\,\theta/2\,\cos\theta/2}{-\,2\,\text{sen}^2\theta/2 + 2i\,\text{sen}\,\theta/2\,\cos\theta/2}$$

$$= \cot\theta/2 \;\cdot\; \frac{\cos\theta/2 + i\,\text{sen}\,\theta/2}{-\,\text{sen}\,\theta/2 + i\cos\theta/2}$$

$$= -\,i\cot\theta/2$$

$$= -\,i\cot k\pi/n+1, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

<u>5a. QUESTÃO - ÍTEM 2</u> (0,5 pontos)

<u>ENUNCIADO:</u> Seja $u = \sum u_n$ uma série definida por

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{a^p\, b^p}{?}, & \text{se } n = 2p \\[2ex] a^{p+1}\, b^p, & \text{se } n = 2p+1 \end{cases}$$

onde a e b são números reais.

a) Determine o conjunto A, de todos os produtos da forma ab (a vezes b), $b \geq 0$, para os quais a série converge.

b) Calcule

$$\sup \{ ax \mid x \in A \} \quad e$$

$$\inf \{ ax \mid x \in A \} .$$

a) $\underline{i}$ Condição necessária para a convergência:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0 .$$

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \begin{cases} \lim\limits_{p \to \infty} (ab)^p/p & se \quad n = 2p \\ \lim\limits_{p \to \infty} a(ab)^p & se \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Se $n = 2p + 1$, o limite existe sss

$a = 0$ ou $|ab| < 1$ e neste caso, se $n = 2p$, o limite também se anula.

Conclusão: $|ab| < 1$ é condição necessária.

$\underline{ii}$ Apliquemos o critério da raiz, para $a > 0$.

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt{ab} \, / \, \sqrt[2p]{p} , & se \quad n = 2p \\ a^{\frac{p+1}{2p+1}} \cdot b^{\frac{p}{2p+1}} , & se \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Porém $\lim\limits_{p \to \infty} \sqrt[2p]{p} = \lim\limits_{p \to \infty} p^{\frac{1}{2p}} = \lim\limits_{p \to \infty} e^{\frac{\ln p}{2p}} =$

$$e^{\lim\limits_{p \to \infty} \frac{\ln p}{2p}} = e^{\lim\limits_{p \to \infty} \frac{1/p}{2}} = e^0 = 1 \text{ (L'Hôpital).}$$

Daí,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt{ab} , & n = 2p \\ a^{1/2} \, b^{1/2} = \sqrt{ab} , & n = 2p+1 \end{cases} , \text{ ou seja}$$

Se $\sqrt{ab} < 1$ ($|ab| < 1$) então u converge

Se $\sqrt{ab} = 1$, $u_n = \begin{cases} 1/p & , n = 2p \\ a & , n = 2p+1 \end{cases}$ e u diverge.

Se $\sqrt{ab} = 0$, $u = 0$ e então $\underline{u}$ converge.

<u>iii</u> Se $a < 0$ a série obtida é absolutamente convergente para $|ab| < 1$ (por <u>ii</u>), logo, converge.

Se $ab = -1$,

$$u_n = \begin{cases} (-1)^p/p & , \quad n = 2p \\ a(-1)^p & , \quad n = 2p+1 . \end{cases}$$

e daí, $\underline{u}$ não converge.

<u>iv</u> De <u>i</u>, <u>ii</u> e <u>iii</u> ,

$A = (-1, +1)$

b) $$\{ax \mid x \in A\} = \begin{cases} (-a, a) & , \text{ se } a > 0 \\ (a, -a) & , \text{ se } a < 0 \\ \{0\} & , \text{ se } a = 0 \end{cases}$$

Como $\sup \{0\} = \inf \{0\} = 0$,

vem: $\sup \{ax \mid x \in A\} = |a|$

$\inf \{ax \mid x \in A\} = -|a|$.

<u>6a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO</u> (1,0 ponto)

<u>ENUNCIADO:</u> Dizemos que uma matriz A é triangular se todos seus elementos acima (ou abaixo) da diagonal principal são nulos.
Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $T(x)$ uma matriz triangular de dimensão $n > 1$, cujos elementos da diagonal principal são definidos como se segue:

Se $1 \leq i \leq n-1$, então $t_{ii}(x) = |x|^{\frac{i}{n-1}}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Se n é ímpar, então $t_{nn}(x) = 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Se n é par, então $t_{nn}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \left[\det T(x)\right]^2, \ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

a) Calcule, caso exista, a derivada de f no ponto $x = 0$.

b) Esboce o gráfico de f assinalando suas principais características, quando $n = 2$.

<u>a</u>

$$\det T(x) = |x|^{\frac{1}{n-1} + \dots + \frac{n-1}{n-1}} \cdot t_{nn}(x)$$

$$\det T(x) = |x|^{\frac{(n-1)n}{2(n-1)}} \cdot t_{nn}(x) = |x|^{\frac{n}{2}}\ t_{nn}(x)$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} |x|^{\frac{1}{n-1}} & & & \\ & |x|^{\frac{2}{n-1}} & & \\ & & |x|^{\frac{n-1}{n-1}} & \\ & & & t_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

Daí, $f(x) = |x|^n\ t_{nn}^2(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

<u>n</u> ímpar $\rightarrow$ $f(x) = |x|^n$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

<u>n</u> par $\longrightarrow$ $f(x) = \begin{cases} |x|^n \cdot \operatorname{sen}^2 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|^n - 0}{x - 0} = 0, & \text{pq } n > 1. \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|^n \operatorname{sen}^2 1/x - 0}{x - 0} = 0, & \text{pq } n > 1 \text{ e a} \end{cases}$$

função seno é limitada.

Logo $\quad f'(0) = 0 \quad , \quad \forall\, n = 2, 3, \ldots$

b) Se $n = 2$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 1/x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i $\quad f$ é par

ii $\quad \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 1 \qquad$ assíntota horizontal

iii $\quad f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = k\pi \quad$ ou $\quad x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad$ ou $\quad x = \frac{1}{k\pi}$

iv $\quad 0 \leq f(x) \leqslant x^2 \quad$ porque $\quad 0 \leqslant \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \leqslant 1$

v $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \quad$ ou $\quad \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

Daí, mínimos: interseções com OX

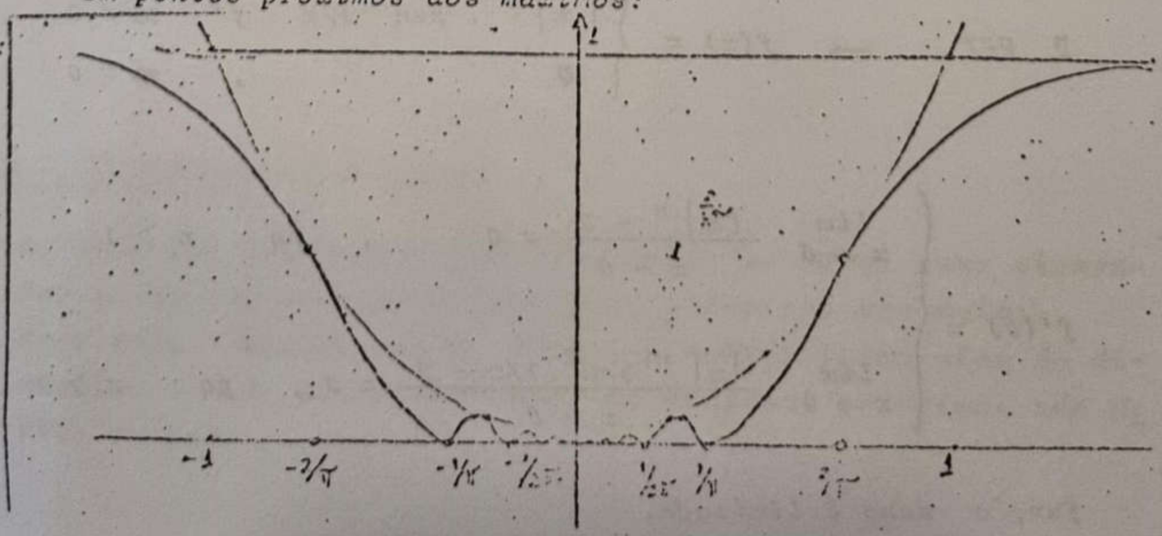
máximos: $\operatorname{tgt} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

vi $\quad$ Interseções com a parábola em $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$

Obs. Pelo gráfico de $\operatorname{tg} u$ e u observa-se que $\operatorname{tgt} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

em pontos próximos dos máximos:

Gráfico:



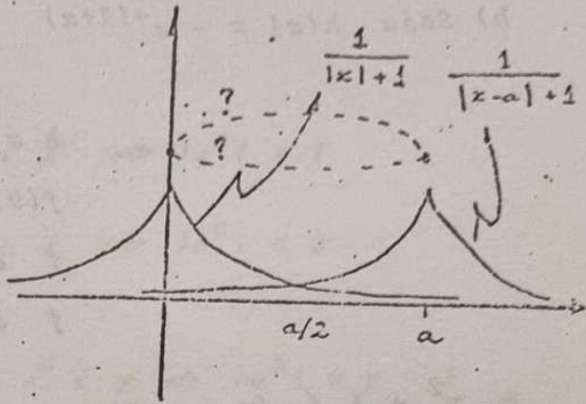
7a. QUESTÃO - ÍTEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \frac{1}{|x| + 1} + \frac{1}{|x - a| + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

onde $a > 0$.

Determine o valor máximo de f.



$$f(0) = f(a) = 1 + \frac{1}{|a| + 1} = \frac{a + 2}{a + 1}.$$

Em $(0, a)$,

$$f(x) = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{a - x + 1};$$

$$f'(x) = \frac{(2x - a)(a + 2)}{(x + 1)^2 (a - x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

$$f(a/2) = \frac{4}{a + 2}$$

Porém $\dfrac{4}{a + 2} < \dfrac{a + 2}{a + 1} \iff (a + 2)^2 - 4(a + 1) > 0$

$\iff a^2 > 0$; daí, o valor máximo de f é $\dfrac{a + 2}{a + 1}$.

7a. QUESTÃO - ÍTEM 2 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos $\min\{f, g\}$ como sendo a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Se $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calcule

$$\int_0^4 \min \{f, g\} \cdot dx$$

b) Seja $h(x) = -e^{-(1+x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determine f sabendo-se que

$h = \min \{f, g\}$

$f(0) = 1$

f é positiva e decrescente em $\mathbb{R}$.

f é primitiva de g em $\mathbb{R}$.

<u>a</u>. $x^2 + 3 \leqslant 4x$ sss $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Daí,

$$\int_0^4 \min \{f, g\} \, dx = \int_0^1 4x \, dx + \int_1^3 (x^2+3) \, dx + \int_3^4 4x \, dx$$

$$= 92/3 \, .$$

<u>b</u>. f positiva $\Rightarrow$ $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

f decrescente $\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

f primitiva de $g \Rightarrow f'(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Daí, $\min \{f, g\} = \min \{f, f'\}$. Porém $f > 0$ e $f' < 0$;

daí, $\min \{f, f'\} = f'$.

Então $f'(x) = -e^{-(x+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^{-(x+1)} + C$.

Porém $f(0) = 1$; daí,

$$f(0) = e^{-1} + C = 1 \implies C = 1 - e^{-1}$$

Finalmente,

$$f(x) = e^{-(x+1)} + 1 - e^{-1} \quad , \; \forall x \in \mathbb{R}$$

8a. QUESTÃO - ÍTEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: Determinar, justificando, o menor inteiro positivo p para o qual

$$\int_0^{\ln p})e^x(\,.\, dx > \ln p \,.$$

Como e^x é crescente, vem

$$0 \leqslant x < \ln 2 \Rightarrow 1 \leqslant e^x < 2 \Rightarrow)e^x(= 1$$

$$\ln 2 \leqslant x < \ln 3 \Rightarrow 2 \leqslant e^x < 3 \Rightarrow)e^x(= 2$$

$$\ln (p-1) \leqslant x < \ln p \Longrightarrow (p-1) \leqslant e^x < p \Rightarrow)e^x(= p - 1$$

Daí,

$$\int_0^{\ln p})e^x(\, dx = \int_0^{\ln 2})e^x(\, dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3})e^x(\, dx + \int_{\ln(p-1)}^{\ln p})e^x(\, dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} 1 \, dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2 \, dx + \ldots + \int_{\ln(p-1)}^{\ln p} (p-1) \, dx$$

$$= (\ln 2) + 2(\ln 3 - \ln 2) + \ldots + (p-1)\left[\ln p - \ln(p-1)\right]$$

$$= \ln \frac{2 \,.\, 3^2 \,.\, 4^3 \ldots .\, p^{p-1}}{2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 4^4 \quad (p-1)^{p-1}} = \ln \frac{p^{p-1}}{(p-1)!}$$

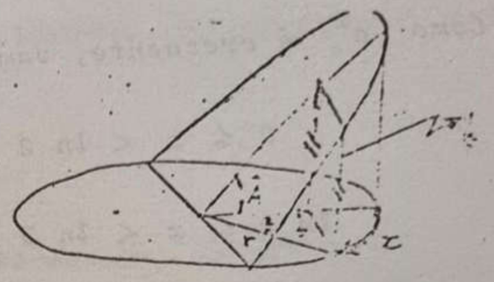
Daí, a condição do problema recai em

$$\frac{p^{p-1}}{(p-1)!} > p \;; \quad \text{Se} \quad p = 1 \quad \text{e} \quad 2 \,, \quad \frac{p^{p-1}}{(p-1)!} = p \,.$$

Para $p = 3$, vem $\frac{9}{2} > 3$; Daí $\boxed{p = 3}$

8a. QUESTÃO - ÍTEM 2 (0,5 pontos)

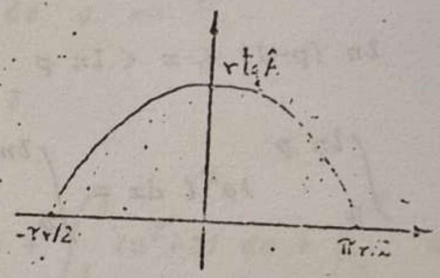
ENUNCIADO: Dado um cilindro circular reto de raio da base igual a r, secciona-se o mesmo por um plano P que passa pelo centro da base formando um ângulo $\hat{A} < 90^\circ$ com a mesma. Determine a área da superfície cilíndrica compreendida entre os planos P e o da base.



$$x = r\,\theta$$

$$y = r \cos\theta \ \mathrm{tg}\,\hat{A}.$$

Planificando o cilindro, vem:



$$A = 2\int_0^{\pi r/2} y\,dx$$

$$= 2\,r\,\mathrm{tg}\,\hat{A}\int_0^{\pi r/2} \cos\frac{x}{r}\,dx$$

$$= 2\,r\,\mathrm{tg}\,\hat{A}\left[r \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{r}\right]_0^{\pi r/2} = 2r^2\,\mathrm{tg}\,\hat{A}\,.$$

9a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ definamos

$$A_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^n - 1 = 0 \right\}.$$

Se $p, q \in \mathbb{Z}_+$ e (p, q) designa seu máximo divisor comum, prove que

$$A_p \cap A_q = A_{(p,\,q)}$$

Façamos $(p, q) = x$. Daí

$\exists\, p' \in \mathbb{N}$ tal que $p = xp'$ (1)

$\exists\, q' \in \mathbb{N}$ tal que $q = xq'$ (2)

com $(p', q') = 1$ (3)

<u>i</u> $A_x \subset A_p \cap A_q$

Seja $z \in A_x$; daí $z^x = 1$; então

$(z^x)^{p'} = 1^{p'}$ e $(z^x)^{q'} = 1^{q'}$, ou seja:

$z^{xp'} = z^p = 1$ e $z^{xq'} = z^q = 1$, ou seja:

$z \in A_p$ e $z \in A_q$; daí, $z \in A_p \cap A_q$.

Daí,

$$A_x \subset A_p \cap A_q .$$

<u>ii</u> $A_p \cap A_q \subset A_x$

Seja $z \in A_p \cap A_q$; daí $z \in A_p$ e $z \in A_q$; daí

$z^p = 1$ e $z^q = 1$; daí , $\exists\, k \in \{0,1,\ldots, p-1\}$ e

$\exists\, k'' \in \{0,1,2,\ldots, q\}$ tal que

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{p}} \quad \text{e} \quad z = e^{\frac{2k''\pi i}{q}}$$

Daí, $\dfrac{k'}{p} = \dfrac{k''}{q}$; então , $\dfrac{k'}{p'x}$ $\dfrac{k''}{q'x}$ $\Longrightarrow$

$\dfrac{k'}{p'} = \dfrac{k''}{q'}$. Porém, como $(p', q') = 1$, k' é múltiplo de

p' e k'' é múltiplo de q'.

Então $\exists\, s \in \mathbb{N}$ tal que $k' = sp'$ (1)

$$\text{Daí,} \quad z = e^{\frac{2k'\pi i}{p}} = e^{\frac{2sp'\pi i}{xp'}} = e^{\frac{2s\pi i}{x}} .$$

ou seja , $z \in A_x$. Daí, $A_p \cap A_q \subset A_x$.

<u>iii</u> De <u>i</u> e <u>ii</u>

$$A_p \cap A_q = A_{(p,q)}$$

10a. QUESTÃO - ÍTEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO: Seja A um conjunto não vazio e R uma relação em A, reflexiva e transitiva. Definimos a relação S, em A, por:

$$xSy \quad \text{se e somente se} \quad xRy \quad \text{e} \quad yRx. \qquad I$$

a) Mostre que S é uma relação de equivalência em A. Caracterize as classes de equivalência determinadas por S em A, quando R é uma relação de ordem.

b) Determine explicitamente o conjunto cociente A/S, quando

$$R = \left[(A \cap B) \times (A \cap B)\right] \cup \left[(A - B) \times (A - B)\right] \quad , \text{ onde}$$

B é um conjunto não vazio.

a) Hipótese: R inflexiva (1)

R transitiva (2)

Tese: S é rel. eq. ; S reflexiva $\underline{i}$

S simétrica $\underline{ii}$

S transitiva $\underline{iii}$

$\underline{i}$ Seja $x \in A$; de (1), $(x , x) \in R$; de I , $(x,x) \in S$.

$\underline{ii}$ Sejam $x, y \in A$, e $(x,y) \in S$; de I, $(x, y) \in R$ e $(y,x) \in R$; então $(y,x) \in R$ e $(x,y) \in R$; de I, $(y,x) \in S$; daí, S é transitiva.

$\underline{iii}$ Sejam $x, y, z \in A$, $(x,y) \in S$ e $(y,z) \in S$;

$$\text{de } I, \begin{cases} (x,y) \in R \quad \text{e} \quad (y,x) \in R \\ (y,z) \in R \quad \text{e} \quad (z,y) \in R \end{cases} ; \text{ então}, \begin{cases} (x,y) \in R \text{ e } (y,z) \in R \\ (z,y) \in R \text{ e } (y,x) \in R \end{cases}$$

Daí, e de (2), $(x,z) \in R$ e $(z,x) \in R$; de I, $(x,z) \in S$.

Então S é transitiva.

De $\underline{i}$, $\underline{ii}$ e $\underline{iii}$, S é rel. eq. em A.

Se R é relação de ordem, R é antisimétrica, isto é,

$$x, y \in A, (x,y) \in R \text{ e } (y,x) \in R \Rightarrow x = y .$$

Daí, e de I,

$$(x,y) \in S \quad \text{sss} \quad x = y$$

Daí, $\{ y \in A \mid y \, S \, x \} = \{ x \}$, ou seja,

$$A/S = \{ \{x\} \mid x \in A \}$$

b) i $\quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$

Daí, $S = R = A \times A$. Então,

$\{ y \in A \mid y \, S \, x \} = A, \ \forall x \in A$; daí,

$A/S = \{ A \}$

ii $\quad A \cap B \neq \emptyset \quad \begin{cases} A - B = \emptyset & (\alpha) \\ A - B \neq \emptyset & (\beta) \end{cases}$

(α): $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subset B \rightsquigarrow A \cap B = A$; daí, $A/S = \{ A \}$

(β): Como $(A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$,

$(x,y) \in R$ sss $x \in A \cap B$ e $y \in A \cap B$ ou

$x \in A - B$ e $\in y$ $A - B$.

Daí, $\{ y \in A \mid y \, S \, x \} = \begin{cases} A - B \\ A \cap B \end{cases}$ ou ;

Daí, $A/S = \{ A - B, \ A \cap B \}$