IME – 1971/1972 – ÁLGEBRA
(O Globo, 15/12/71, págs. 26 e 27)

1ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO: [illegible]

Seja E a elipse de equação

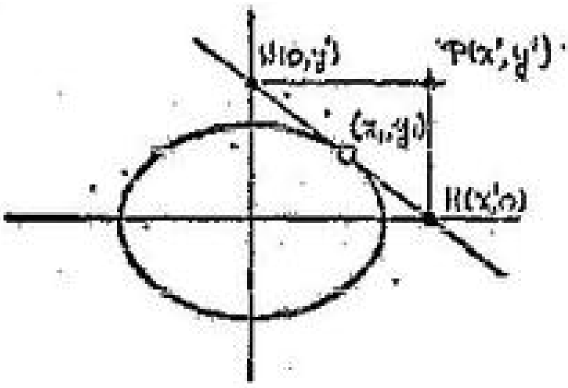
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e t uma tangente variável. Sejam $M (x', 0)$ e $N (0, y')$ as interseções de t com os eixos coordenados $0x$ e $0y$, respectivamente. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico descrito pelo ponto $P(x', y')$ e esboce o seu gráfico.

SOLUÇÃO:

EQUAÇÃO DA TANGENTE:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$



$\underline{M}$

$$y' = 0 \Rightarrow x' = \frac{a^2}{x_1} \qquad x_1 = \frac{a^2}{x'}$$

$\underline{N}$

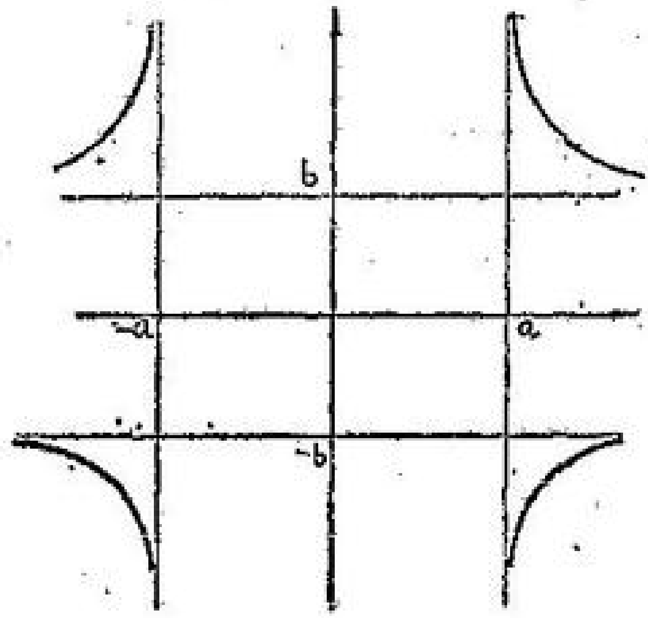
$$x' = 0 \Rightarrow y' = \frac{b^2}{y_1} \qquad y_1 = \frac{b^2}{y'}$$

Como $(x_1, y_1) \in \mathcal{E}$: $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$

logo:

$$\frac{a^4/x'^2}{a^2} + \frac{b^4/y'^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{x'^2} + \frac{b^2}{y'^2} = 1$$

$$\boxed{y'^2 = \frac{b^2}{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$$



1ª QUESTÃO ITEM 2 (0,5pontos)	ENUNCIADO:

Seja $m \in \mathbb{R}$, fixado, e

$$(k+1)^2y^2 + x^2 + 2(k-1)xy + mk^2y = 0$$

a equação cartesiana de uma família F de cônicas de parâmetro k. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das cônicas da família F.

SOLUÇÃO:

Seja $(\bar{x},\bar{y})$ o centro da cônica, então a translação

$$\begin{cases} x = x' + \bar{x} \\ y = y' + \bar{y} \end{cases}$$

elimina os têrmos do primeiro grau.

$$(k+1)^2(y'+\bar{y})^2 + (x'+\bar{x})^2 + 2(k-1)(x'+\bar{x})(y'+\bar{y}) + mk^2(y'+\bar{y}) = 0$$

$$(k+1)^2(y'^2+2y'\bar{y}+\bar{y}^2) + (x'^2+2x'\bar{x}+\bar{x}^2) + 2(k-1)(x'y'+\bar{x}y'+\bar{y}x' + \bar{x}\bar{y}) + mk^2(y'+\bar{y}) = 0$$

logo:

COEFICIENTE DE x': $2\bar{x} + 2(k-1)\bar{y}$

COEFICIENTE DE y': $2(k+1)^2\bar{y} + 2(k-1)\bar{x} + mk^2$

como coef. $x' = 0$ e coef. $y' = 0$

temos:

$$\begin{cases} \bar{x} + (k-1)\bar{y} = 0 \\ 2(k+1)^2\bar{y} + 2(k-1)\bar{x} + mk^2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\bar{y} = -\frac{mk}{8} \quad e \quad \bar{x} = \frac{(k-1)km}{8}$$

Que são as equações paramétricas do L.G.

Para obter a equação cartesiana, eliminamos $\underline{k}$.

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \left(\frac{8\bar{y}}{m} + 1\right)$$

$$\boxed{8\bar{y}^2 + m\bar{y} - m\bar{x} = 0}$$

2ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,5pontos)

ENUNCIADO:

Sejam $b \in \mathbb{Z}_+$, $b > 1$ e $N \in \mathbb{N}$, Suponhamos N expresso sob a forma

$$N = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$, onde os coeficientes satisfazem a relação

$$0 \leq a_i \leq b-1 \quad , \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots , p\}$$

Dizemos, então, que a representação de N na base de numeração b é

$N = (a_p a_{p-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b$, onde o índice b indica a base considerada.

a) Determine, com a notação exposta acima, a representação de 1347 na base 10 e de 929 na base 5.

b) Determine em que base(s) de numeração é verificada a igualdade

$$(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b$$

c) Mostre que se $N = (14641)_b$, então independentemente da base considerada, N é quadrado perfeito. Determine a representação de $\sqrt{N}$ na base $b+1$ (b mais um).

d) Determine a representação de $N = (14654)_b$ na base $b+1$ (b mais um).

SOLUÇÃO:

a)

1347 | 10
34   134 | 10
347   34   13 | 10
$\underbrace{7}_{a_0}$ $\underbrace{4}_{a_1}$ $\underbrace{3}_{a_2}$ 1 | 10
$\underbrace{1}_{a_3}$ 0

$1347 = (1347)_{10}$

929 | 5
42   185 | 5
29   35   37 | 5
$\underbrace{4}_{a_0}$ $\underbrace{0}_{a_1}$ $\underbrace{2}_{a_2}$ 7 | 5
$\underbrace{2}_{a_3}$ 1 | 5
$\underbrace{1}_{a_4}$ 0

$929 = (12204)_5$

b) $(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b^3 + 2 + 2\times 5 + 1 = 2b^2 + 2b + b^3 + b^2 + 2b + 1$ @ $b \in \mathbb{Z}^+, b > 2$

$\Leftrightarrow b^3 - 3b^2 - 4b + 12 = 0$ @ $b \in \mathbb{Z}^+, b > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b \in \{-2, 2, 3\}$ @ $b \in \mathbb{Z}^+, b > 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = 3$

c) $H = (14641)_b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1$ @ $b \geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H = (b+1)^4$ @ $b \geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H = [(b+1)^2]^2$ @ $b \geq 7$

logo H é quadrado perfeito para todo $b \geq 7$.

$\sqrt{H} = (b+1)^2 \Rightarrow \sqrt{H} = (100)_b$.

d) $H = (14654)_b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 5b + 4$ @ $b \geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 + b + 3$ @ $b \geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b+1)^4 + (b+1) + 2$ @ $b \geq 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow H = (10012)_{b+1}, b \geq 7$

2ª QUESTÃO	ENUNCIADO:
ITEM 2 (0,5 pontos)	

Dizemos que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função exponencial se

$f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde a é uma constante real estritamente positiva. Determine as funções exponenciais que satisfazem à equação

$$6f(x+5) + f(x+4) - 43f(x+3) - 43f(x+2) + f(x+1) + 6f(x) = 0$$

SOLUÇÃO:

$$6f(x+5) + f(x+4) - 43f(x+3) - 43f(x+2) + f(x+1) + 6f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6a^5 + a^4 - 43a^3 - 43a^2 + a + 6)\, a^x = 0$$

A equação $6a^5 + a^4 - 43a^3 - 43a^2 + a + 6$ é recíproca de 1ª espécie, 1ª classe e grau par. Logo admite a raiz $a = -1$

	6	1	-43	-43	1	6
-1	6	-5	-38	-5	6	0

Temos: $6(a^4+1) - 5(a^3+a) - 38 = 0 \quad \div a^2$

$$6\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - 5\left(a + \frac{1}{a}\right) - 38 = 0$$

Seja $y = a + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = y^2 - 2$.

Recaímos em $6y^2 - 5y - 50 = 0 \quad \begin{cases} y_1 = 10/3 \\ y_2 = -5/2 \end{cases}$

Daí: $a + \frac{1}{a} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3$ ou $a = \frac{1}{3}$

$a + \frac{1}{a} = -\frac{5}{2}$ (não serve, pois $a > 0$).

Resposta: $\boxed{f(x) = 3^x}$ ou $\boxed{f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

3ª QUESTÃO ITEM 1 (0,5 pontos)	ENUNCIADO: Prove, aplicando o Princípio da Indução,

que se $n \in \mathbb{N}$, e $p \in \mathbb{Z}_+$ é um número primo, então

$n^p - n$ é divisível por p.

SOLUÇÃO:

(i) é válido para $n = 1$

$1^p - 1 = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0 \mod p; \ \forall p$

(ii) hipótese de indução

$k^p - k \equiv 0 \mod p$

sabemos que

$(k+1)^p = k^p + C_p^1 k^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} k + 1$

Subtraindo $(k+1)$ em ambos os membros

$(k+1)^p - (k+1) = (k^p - k) + (C_p^1 k^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} k)$

analisemos o 2º membro da igualdade.

* $k^p - k \equiv 0 \mod p$ (pela hipótese de indução)

* $C_p^1 k^{p-1} + \dots + C_p^{p-1} \equiv 0 \mod p$ (porque $C_p^i \equiv 0 \mod p$; $i = \overline{1, p-1}$)

OBS: $C_p^i = \frac{p(p-1)\dots(p-i+1)}{i!}$

como p é primo e $C_p^i \in \mathbb{Z}_+$

e p não é divisível por $i!$

temos: $(p-1)\dots(p-i+1)$ é divisível por $i!$

logo C_p^i é divisível por p.

As asserções assinaladas com * completam a prova

$$\boxed{(k+1)^p - (k+1) \equiv 0 \mod p}$$

Q.E.D

3ª QUESTÃO ITEM 2 (0,5pontos)	ENUNCIADO:

Seja A um conjunto tal que $n(A)=p>0$.

Determinar justificando :

a) o número de relações reflexivas distintas em A.

b) o número de relações simétricas distintas em A.

c) o número de relações antisimétricas distintas em A.

SOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{ccccc}
(a_1,a_1) & (a_1,a_2) & (a_1,a_3) & \cdots & (a_1,a_p) \\
(a_2,a_1) & (a_2,a_2) & (a_2,a_3) & \cdots & (a_2,a_p) \\
\vdots & & \ddots & & \\
(a_p,a_1) & (a_p,a_2) & (a_p,a_3) & \cdots & (a_p,a_p)
\end{array}
$$

(a) R é reflexiva em A sss $\forall x \subset A$, $(x,x) \in R$

Logo R tem que conter todos os pontos da diagonal.

(p pontos)

Sobraram p^2-p pontos que podemos escolher ou não.

Conclusão: $\boxed{2^{p^2-p} \text{ relações reflexivas.}}$

(b) R é simétrica em A sss $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Rightarrow$
$\Rightarrow (y, x) \in R$.

Na diagonal existem p pontos

Abaixo da diagonal existem $\frac{p^2-p}{2}$ pontos

Acima da diagonal existem $\frac{p^2-p}{2}$ pontos

Para que R seja simétrica, temos:

$(a_j, a_i) \in R \ (j > i) \Rightarrow (a_i, a_j) \in R$

Conclusão: $2^{\frac{p^2-p}{2}+p}$

$\boxed{2^{\frac{p^2+p}{2}} \text{ relações simétricas}}$

(c) R é antissimétrica em A sss $\forall x, y \in A, (x, y) \in R$, $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$

seja $a = \frac{p^2-p}{2}$

tomando k pontos abaixo $\Rightarrow$ sobram apenas $a-k$ pontos acima para escolher, bem como os p pontos da diagonal

Logo: $\sum_{k=0}^{a} C_a^k \, 2^{a-k+p} = 2^p \sum_{k=0}^{a} C_a^{a-k} \, 2^{a-k} =$

$= 2^p (1+2)^a = 2^p \, 3^a$

Conclusão: $\boxed{2^p \cdot 3^{\frac{p^2-p}{2}} \text{ relações antissimétricas.}}$

4ª QUESTÃO	ENUNCIADO:
ITEM ÚNICO(1 pontos)	

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{i=]|x|[}^{i=\infty} \frac{x}{a^i}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \text{ onde } a > 1 \text{ é uma cons-}$$

tante fixada. Determine, justificando:

a) Os pontos de descontinuidade de f.

b) O domínio da função f', derivada de f.

c) $\lim_{x \to \infty} f$.

SOLUÇÃO:

a) $f(x) = \sum_{i=]|x|[}^{\infty} \frac{x}{a^i}$ é série geométrica de razão $\frac{1}{a}$

logo $f(x) = \dfrac{x/a^{]|x|[}}{1 - 1/a} = \dfrac{ax}{(a-1)\,a^{]|x|[}}$

seja $x \in [k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = \dfrac{ax}{(a-1)\,a^{|k|}} \ldots$ (1)

De (1) concluímos que f é contínua em $(k, k+1)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

verifiquemos então os pontos tais que x é inteiro

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to k^+} f(x) = \dfrac{ak}{(a-1)\,a^{|k|}} \\[2ex] \lim\limits_{x \to k^-} f(x) = \dfrac{ak}{(a-1)\,a^{|k-1|}} \end{cases}$$

o limite à direita não será igual ao limite à esquerda, porque não existe inteiro k tal que

$$|k| = |k-1|$$

logo $\boxed{f \text{ é descontínua em } \mathbb{Z}}$

b) O domínio da f' não pode conter pontos tais que $x \in \mathbb{Z}$ porque nêsses pontos a f não é contínua. Basta, portanto, testar os pontos sôbre os quais f é contínua

$x \in (k, k+1)$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = \dfrac{ax}{(a-1)\,a^{|k|}}$

logo f é derivável nêstes pontos e f' vale

$$f'(x) = \frac{a}{(a-1)\,a^{|k|}} \quad , \quad x \in (k, k+1)$$

então: $\boxed{\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}}$

c) $f(x) = \dfrac{ax}{(a-1)\,a^{|[x]|}}$

como $a^{|[x]|} \approx a^{x}$; $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{(a-1)\,a^{x}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = 0}$$

3ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $A = \mathbb{R} - \{-1,+1\}$ e $f: A \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right], \forall x \in A$$

Mostre que se $f^{(n)}$ designa a derivada de ordem $\underline{n}$ de f, então podemos expressá-la sob a forma

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n+1}}$$, onde P_n é um polinômio de grau $\underline{n}$. Determine tôdas as raízes de P_n.

SOLUÇÃO:

i) Seja $h \Rightarrow h(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{x+1}$

$f(x) = \frac{1}{2}(h(x)+g(x)) \Rightarrow f^{n}(x) = \frac{1}{2}(h^{n}(x)+g^{n}(x))$

$h'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

$h''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ $\qquad$ $g''(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$

$\vdots$

$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(x-1)^{n+1}}$ $\qquad$ $g^{(n)}(x) = -\frac{(-1)^n \times n!}{(x-1)^{n+1}}$

Logo:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n \times n! \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\times n!}\left[\frac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}\right] =$$

Logo:

$$f^{n}(x) = \frac{\frac{(-1)^n}{2\times n!}\left[(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}\right]}{(x^2-1)^{n+1}}$$

Porém: $(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = (x^{n+1} + C_{n+1}^{1} x^{n} + C_{n+1}^{2} x^{n-1} + \dots + C_{n+1}^{n} x +$

$+ 1) - (x^{n+1} - C_{n+1}^{1} x^{n} + C_{n+1}^{2} x^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1}) =$

$= 2(C_{n+1}^{1} x^{n} + C_{n+1}^{3} x^{n-2} + \dots + 1 + (-1)^{n+1})$

Portanto:

$$f^{n}(x) = \frac{\frac{(-1)^{n}}{n!}\left(C_{n+1}^{1} x^{n} + C_{n+1}^{3} x^{n-2} + \dots + 1 + (-1)^{n+1}\right)}{(x^{2}-1)^{n+1}} = \frac{P(n)}{(x^{2}-1)^{n+1}}$$

onde $P(n)$ é polinômio de grau $\underline{n}$

(ii) $P^{n}(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)^{n+1} = (x-1)^{n+1} \xLeftrightarrow[\text{não é raiz}]{\text{como } x=1}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n+1} = \operatorname{cis} \alpha$

$x + 1 = x . \operatorname{cis} \alpha - \operatorname{cis} \alpha \Leftrightarrow x(\operatorname{cis} \alpha - 1) = 1 + \operatorname{cis} \alpha$

$$x = \frac{1 + \operatorname{cis} \alpha}{\operatorname{cis} \alpha - 1} = \frac{1 + \cos \alpha + i . \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + i . \operatorname{sen} \alpha - 1} = \frac{2\cos^{2} \frac{\alpha}{2} + 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{-(2\operatorname{sen}^{2} \frac{\alpha}{2} - 2i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})} =$$

$$= -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \quad \frac{\operatorname{cis} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} = -i . \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$$

Logo: $x = -i \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{n+1}$, $k \in]1, 2, \dots, n[$

5ª QUESTÃO

ITEM 2 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $u = \sum u_n$ uma série definida por

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{a^p b^p}{p}, & \text{se} \quad n = 2p \\ a^{p+1} b^p, & \text{se} \quad n = 2p+1 \end{cases}$$

onde a e b são números reais.

a) Determine o conjunto A, de todos os produtos da forma ab (a vêzes b), $b \neq 0$, para os quais a série converge.

b) Calcule

$$\sup \{ ax \mid x \in A \} \text{ e}$$

$$\inf \{ ax \mid x \in A \}.$$

SOLUÇÃO:

a) (i) suponhamos $ab = 0 \Rightarrow u_n = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

Escrevendo a série na forma

$$\sum u_n = a + \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{(ab)^p}{p} + a(ab)^p \right] =$$

$$= a + \sum_{p=1}^{\infty} (ab)^p \left(a + \frac{1}{p} \right) \quad \ldots (1)$$

(ii) suponhamos $ab > 0$ ($a > 0$ e $b > 0$)

$\boxed{\sum u_n \text{ é convergente para } ab < 1}$

porque $\sum (ab)^p$ é convergente para $ab < 1$

OBS: Usamos o seguinte LEMA

se u_n e v_n são sequências positivas tais que

$0 < \lim \dfrac{u_n}{v_n} < \infty \Rightarrow \sum u_n$ e $\sum v_n$ convergem ou divergem simultâneamente

(iii) suponhamos que $ab<0$ $(a<0$ e $b>0)$

fazendo $c=-a$ em (1) vem:

$\sum u_n = -c + \sum (-1)^{p+1} (cb)^p (c - \frac{1}{p})$

é uma série alternada logo será convergente

sss $\lim_{p\to\infty} (cb)^p (c - \frac{1}{p}) = 0$

logo $(cb) < 1 \Rightarrow ab > -1$

(iv) de (i), (ii) e (iii) temos:

$A = \{ x \mid |x| < 1 \}$

b) $\sup \{ax \mid x \in A\} = |a|$

$\inf \{ax \mid x \in A\} = -|a|$

6ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 pontos)	ENUNCIADO:

Dizemos que uma matriz A é triangular se todos seus elementos acima (ou abaixo) da diagonal principal são nulos.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $T(x)$ uma matriz triangular de dimensão $n>1$, cujos elementos da diagonal principal são definidos como se segue:

se $1 \le i \le n-1$, então $t_{ii}(x) = |x|^{\frac{i}{n-1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

se n é impar, então $t_{nn}(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

se n é par, então $t_{nn}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = [\det T(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Calcule, caso exista, a derivada de f no ponto $x = 0$.

b) Esboce o gráfico de f assinalando suas principais características, quando $n = 2$.

SOLUÇÃO:

(a)

$$\det T(x) = \begin{vmatrix} |x|^{\frac{1}{n-1}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & |x|^{\frac{2}{n-1}} & 0 \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 0 & \\ & & & |x|^{\frac{n-1}{n-1}} & 0 \\ & & & & t_{nn}(x) \end{vmatrix} = |x|^{\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1}} t_{nn}(x) =$$

$$= |x|^{\frac{n}{2}} \cdot t_{nn}(x)$$

i) n ímpar $\quad f(x) = |x|^n$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|^n - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^n}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{n-1} = 0 \quad (n>1)$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|^n - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^n}{h} = -\lim_{h \to 0} h^{n-1} = 0 \quad (n>1)$$

logo $\boxed{f'(0) = 0}$

(ii) <u>n par</u>:

$$f(x)=\begin{cases} |x|^n \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} = x^n \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ (n par)} \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^n \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}$$

Como $n>1 \Rightarrow \lim_{h\to 0} h^{n-1}=0$; a função $h \mapsto \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}$ é limitada.

Logo $f'(0)=\lim_{h\to 0} h^{n-1} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h} = 0$

$\boxed{\text{Resp: } f'(0)=0}$

(b) $f(x)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

Estudo do gráfico:

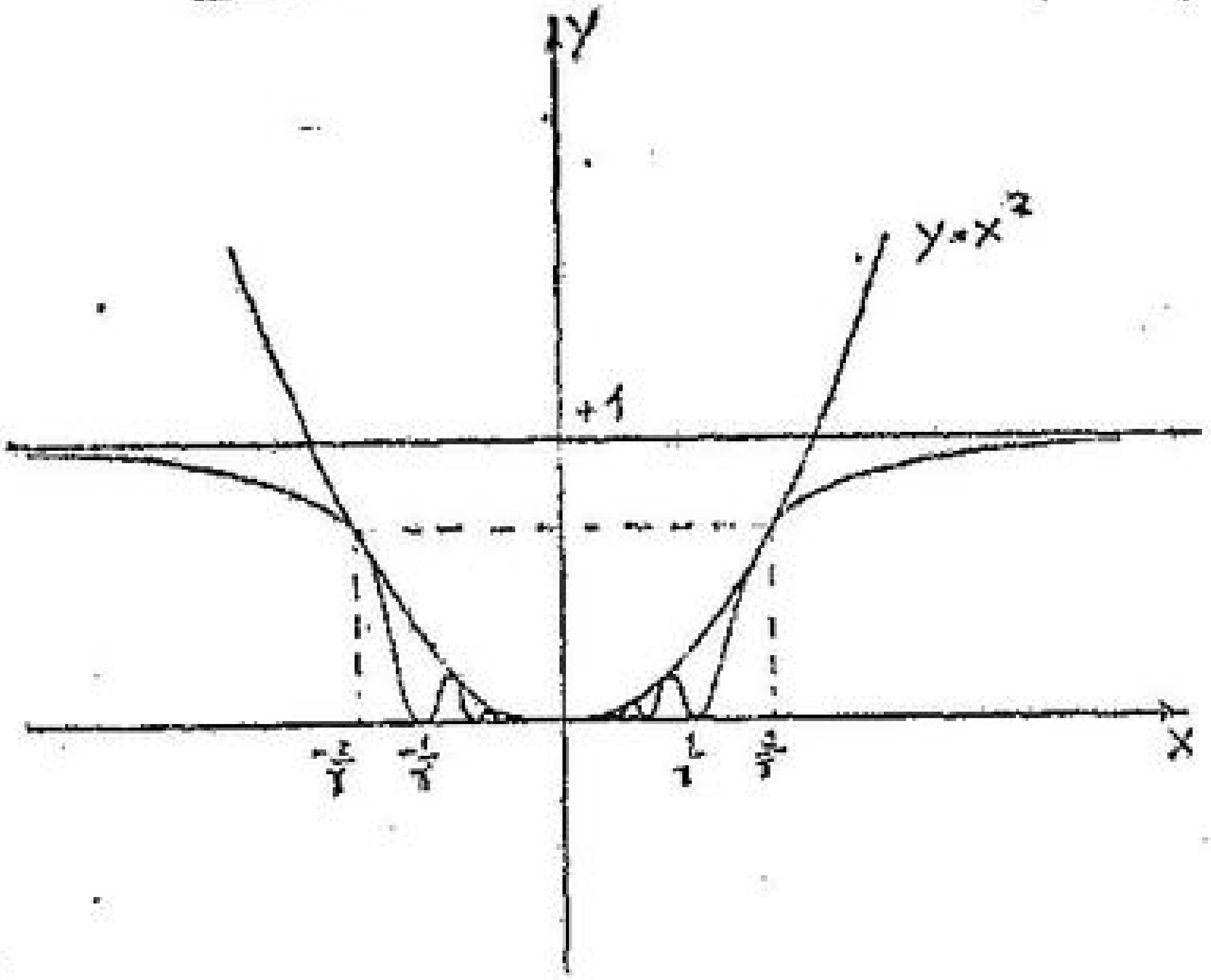
(i) O gráfico é simétrico em relação ao eixo dos y.

(ii) Os pontos de tangência do gráfico ao eixo dos x são os pontos do tipo $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$ e coincidem, obviamente, com os pontos de mínimo.

(iii) Os pontos de máximo relativo se encontram ligeiramente à direita dos pontos de tangência à parábola $y=x^2$, sendo os últimos da forma $\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$

(iv) $\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} = 1^-$, pois $\operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}$

GRÁFICO :



7ª QUESTÃO

ITEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = \frac{1}{|x|+1} + \frac{1}{|x-a|+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde $a > 0$.

Determine o valor máximo de f.

SOLUÇÃO:

$$f(x) = \frac{1}{|x|+1} + \frac{1}{|x-a|+1}, \quad a > 0$$

Seja $x < 0$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{a-x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(a-x+1)^2} > 0 \Rightarrow f \text{ é crescente}$$

Seja $x > a$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-a+1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-a+1)^2} < 0 \Rightarrow f \text{ é decrescente}$$

Seja $0 < x < a$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{a-x+1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(a-x+1)^2}$$

igualando a zero, encontramos $\boxed{x = \frac{a}{2}}$

Logo os pontos a serem testados são:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = a/2 \\ x = a \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{1}{1} + \frac{1}{|a|+1} = \frac{a+2}{a+1}$$

$$f(a/2) = \frac{1}{a/2+1} + \frac{1}{a/2+1} = \frac{4}{a+2}$$

$$f(a) = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1} = \frac{a+2}{a+1}$$

o maior número entre $\frac{a+2}{a+1}$ e $\frac{4}{a+2}$, será o máximo

logo: $\frac{a+2}{a+1} - \frac{4}{a+2} = \frac{a^2+4a+4-4a-4}{(a+1)(a+2)} = \frac{a^2}{(a+1)(a+2)} > 0$

logo o máximo é $\boxed{\frac{a+2}{a+1}}$

7ª QUESTÃO

ITEM 2 (0,5pontos)

ENUNCIADO:

Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Definimos $\min\{f, g\}$ como sendo a função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Se $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = 4x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calcule

$$\int_0^4 \min\{f, g\} \, dx$$

b) Seja $h(x) = -e^{-(1+x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determine f sabendo-se que

$h = \min\{f, g\}$

$f(0) = 1$

f é positiva e decrescente em $\mathbb{R}$.

f é primitiva de g em $\mathbb{R}$.

SOLUÇÃO:

a) $f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \Rightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) < 0, \ \forall x \in (1,3) \\ f(x) - g(x) > 0, \ \forall x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \end{cases}$

logo:

$$h(x) = \begin{cases} 4x, & 0 < x < 1 \\ x^2+3, & 1 \leq x \leq 3 \\ 4x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \int_0^4 h(x)dx = \int_0^1 4x\,dx + \int_1^3 (x^2+3)dx + \int_3^4 4x\,dx = \boxed{\frac{92}{3}}$$

b) i) $h(x) < 0, \forall x$; $f(x) > 0, \forall x \Rightarrow h(x) \neq f(x) \Rightarrow h(x) = g(x), \forall x$

ii) $f'(x) = g(x) \quad \forall x \Rightarrow f(x) = -\int e^{-(1+x)}dx = e^{-(1+x)} + C$

Como $f(0) = 1$, temos $C = 1 - e^{-1}$.

Conclusão: $\boxed{f(x) = e^{-(1+x)} + 1 - e^{-1}}$

OBS: O dado f é decrescente é desnecessário, porém está de acôrdo com a função encontrada.

8ª QUESTÃO

ITEM 1 (0,5 pontos)

ENUNCIADO:

Determinar, justificando, o menor inteiro positivo p para o qual

$$\int_0^{\ln p})e^x(\cdot dx > \ln p .$$

SOLUÇÃO:

LEMA: Sejam f e g funções tais que:

$f(a) \geq g(a)$ e $f'(x) > g'(x)$, $\forall x > a$. Então $f(x) > g(x)$, $\forall x > a$

---

i) Seja f tal que $f(x) = \int_0^{\ln x})e^x(\, dx$

$$f(2) = \int_0^{\ln 2})e^x(\, dx = \int_{\ln 1}^{\ln 2})e^x(\, dx$$

$$\ln 1 \leq x < \ln 2 \Rightarrow 1 \leq e^x < 2 \Rightarrow)e^x(= 1$$

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2})e^x(\, dx = \int_{\ln 1}^{\ln 2} dx = \ln 2$$

$$f'(x) =)e^{\ln x}(\times \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) =)x(\times \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) > \frac{1}{x}, \ \forall x \geq 2$$

ii) Seja g tal que $g(x) = \ln x$

$$g(2) = \ln 2$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) < f'(x), \ \forall x \geq 2$$

Logo: $\left.\begin{array}{l} f(2) = g(2) \\ f'(x) > g'(x), \forall x \geq 2 \end{array}\right| \xRightarrow{\text{pelo Lema}} f(x) > g(x), \ \forall x \geq 2$

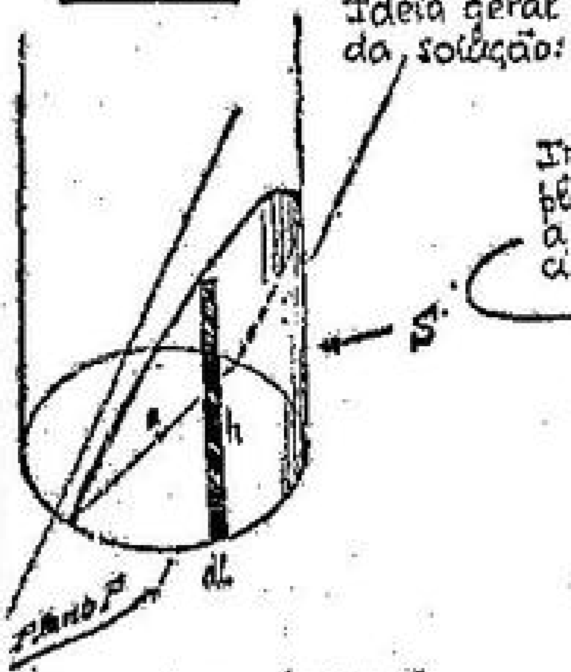
Como $f(1) = g(1) = 0$, temos:

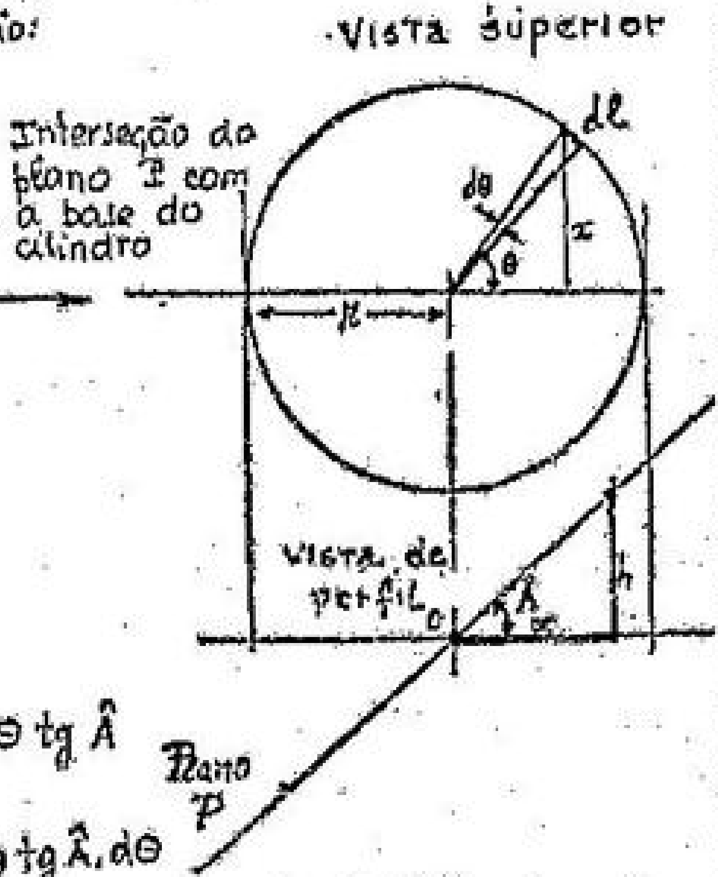
p menor inteiro tal que $f(x) > g(x) \Leftrightarrow \boxed{p = 3}$

5ª QUESTÃO ITEM 2 (0,5pontos)	ENUNCIADO:

Dado um cilindro circular reto de raio da base igual a r, secciona-se o mesmo por um plano P que passa pelo centro da base formando um ângulo $\hat{A} < 90°$ com a mesma. Determine a área da superfície cilíndrica compreendida entre os planos P e o da base.

SOLUÇÃO:





$$x = r \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$h = x \operatorname{tg}\hat{A} = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\hat{A}$$

$$dl = r\,d\theta$$

$$dS = h\,dl = r^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\hat{A}\,d\theta$$

$$\therefore S = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{tg}\hat{A}\,d\theta = -r^2 \operatorname{tg}\hat{A}\cos\theta \Big]_0^{\pi} = 2r^2 \operatorname{tg}\hat{A}$$

$$\boxed{\text{Conclusão: } S = 2r^2 \operatorname{tg}\hat{A}}$$

9ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 pontos)	ENUNCIADO:

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ definamos

$$A_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n - 1 = 0\}.$$

Se $p, q \in \mathbb{Z}_+$ e (p, q) designa seu máximo divisor comum, prove que

$$A_p \cap A_q = A_{(p,q)}$$

SOLUÇÃO:

Seja $(p,q) = r \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } p = ar \\ \exists b \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } q = br \end{array} \right.$

$z^n - 1 = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = \text{cis } \frac{2k\pi}{n}$

i) Seja $z \in A_{(p,q)} \Rightarrow \exists k$ tal que $z = \text{cis } \frac{2k\pi}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \text{cis } \frac{2ka\pi}{\underbrace{(ar)}_{p}} = \text{cis } \frac{2kb\pi}{\underbrace{(br)}_{q}}$.

Logo: $\left. \begin{array}{l} \exists k_1 = ka,\ k_1 \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } z = \text{cis } \frac{2k_1\pi}{p} \Rightarrow z \in A_p \\ \exists k_2 = kb,\ k_2 \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } z = \text{cis } \frac{2k_2\pi}{q} \Rightarrow z \in A_q \end{array} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in A_p \cap A_q \Rightarrow A_{(p,q)} \subset A_p \cap A_q$

ii) Seja $z \in A_p \cap A_q$

$\exists\ k_1 < p,\ k_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $z = cis\ \frac{2k_1\pi}{p}$

$\exists\ k_2 < q,\ k_2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $z = cis\ \frac{2k_2\pi}{q}$

Logo: $\frac{k_1}{p} = \frac{k_2}{q} = \frac{m}{n}$, onde $\underline{m}$ e $\underline{n}$ são primos entre si

Logo $\left.\begin{array}{l} n \text{ é divisor de } p \\ n \text{ é divisor de } q \end{array}\right| \Rightarrow \exists\ c \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r = cn$

Portanto:

$$\frac{k_1}{p} = \frac{k_2}{q} = \frac{m}{n} = \frac{mc}{nc} = \frac{mc}{r}$$

seja $mc = k \Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $z = cis\ \frac{2k\pi}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in A_r \Rightarrow z \in A_{(p,q)}$

Logo: $A_p \cap A_q \subset A_{(p,q)}$

De (i) e (ii): $A_p \cap A_q = A_{(p,q)}$

C.Q.D.

10ª QUESTÃO ITEM ÚNICO (1 pontos)	ENUNCIADO:

Seja A um conjunto não vazio e R uma relação em A, reflexiva e transitiva. Definimos a relação S, em A, por :

$$xSy \quad \text{se e somente se} \quad xRy \ \text{e} \ yRx.$$

a) Mostre que S é uma relação de equivalência em A. Caracterize as classes de equivalência determinadas por S em A, quando R é uma relação de ordem.

b) Determine explicitamente o conjunto cociente A/S, quando

$$R = [(A \cap B) \times (A \cap B)] \cup [(A - B) \times (A - B)] \quad \text{, onde}$$

B é um conjunto não vazio.

SOLUÇÃO:

a) S relação de equivalência $\Leftrightarrow$ S é reflexiva, simétrica e transitiva.

i) Seja $x \in A$

R reflexiva $\Rightarrow xRx$

$xRx \Leftrightarrow xRx$ e $xRx \Leftrightarrow xSx$

Logo, $\forall x \in A$, $xSx \Rightarrow S$ é reflexiva.

ii) Seja xSy

$xSy \Leftrightarrow xRy$ e $yRx \Leftrightarrow yRx$ e $xRy \Leftrightarrow ySx$

Logo, $xSy \Leftrightarrow ySx \Rightarrow S$ é simétrica

iii) Sejam xSy e ySz

xSy e $ySz \Leftrightarrow xRy$ ⓔ yRx ⓔ yRz ⓔ $zRy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(xRy$ ⓔ $yRz)$ ⓔ $(yRx$ ⓔ $xRz)]$ transitividade de R

$\Rightarrow (xRz$ e $zRx) \Rightarrow xSz$

Logo: xSy e $ySz \Rightarrow xSz \Rightarrow S$ é transitiva

De (i), (ii) e (iii) $\Rightarrow S$ é relação de equivalência

C.Q.D.

$\mathcal{R}$ relação de ordem $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

$\mathcal{R}$ antissimétrica $\Leftrightarrow$ $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$

$$x\,S\,y \Leftrightarrow x = y$$

Seja $x_0 \in A$

$$\bar{x}_0 = \{y \mid y\,S\,x_0\} = \{y \mid y = x_0\} = \{x_0\}$$

Logo:

C é classe de equivalência determinada por S em $A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C = \{x_0\}, \forall x_0 \in A$

b) $\mathcal{R} = [(A\cap B)\times(A\cap B)] \cup [(A-B)\times(A-B)]$

$x\,S\,y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$

$x\,S\,y \Leftrightarrow (x \in A\cap B$ e $y \in A\cap B)$ ou $(x \in (A-B)$ e $y \in (A-B))$

Como $(A\cap B)\cap(A-B) = \emptyset$, se $B \neq \emptyset$, temos as seguintes classes de equivalência:

$$C_1 = \{x \mid x \in A\cap B\}$$

$$C_2 = \{y \mid y \in A-B\}$$

$\mathbb{R}$ = conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{C}$ = conjunto dos números complexos
sup A = supremo do conjunto A
inf A = ínfimo do conjunto A
$f: A \to B$ = função de A em B
$\lim_{x\to x_0} f$:= limite
$\lim_{x\to x_0^+} f$:= limite à direita
$\lim_{x\to x_0^-} f$:= limite à esquerda
f' := derivada primeira de f
$f^{(n)}$:= derivada de ordem n de f
$a = (a_n)$:= sequência, sucessão

$\forall x$:= qualquer que seja x
$\exists x$:= existe x
$x \in A$:= x pertence à A
$A \subset B$:= A é subconjunto de B
$A \cup B$:= A união B
$A \cap B$:= A interseção B
$A - B$:= A menos B
$A \times B$:= A cartesiano B
$n(A)$:= nº de elementos do conjunto A
$A/\mathcal{R}$:= conjunto cociente de A por $\mathcal{R}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$u = \sum u_n$:= série de têrmo geral u_n
$]y[$ = maior inteiro menor ou igual a y
$|y|$ = módulo de y
$\ln x$ = logaritmo neperiano de x
$\log_b x$ = logaritmo de x na base b
$P(a,b)$ = ponto P de coordenadas a e b
(a,b) = máximo divisor comum entre a e b; intervalo aberto; par ordenado
$\det A$ = determinante da matriz A

Índice de Anotações