IME - CEE - 1976	ÁLGEBRA	01

1ª QUESTÃO
ITEM 1 (0,5 ponto)

ENUNCIADO:

Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine o conjunto A onde $A \subset \mathbb{R}$, domínio de definição da função f, onde

$$f: x \longmapsto \log_2(x^2 - x - 1)$$

1ª QUESTÃO
ITEM 2 (0,5 ponto)

ENUNCIADO:

Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \det \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x \\ e^x & x \end{pmatrix}$$

Desenvolva a função f dada, em torno da origem, com uso da Fórmula de Taylor até o termo de segundo grau em x.

2ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Sejam x_1 e x_2 raízes da equação

$$x^2 - (a + d)\,x + ad - bc = 0$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Determine A de modo que x_1^3 e x_2^3 sejam raízes da equação: $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3\,bcd)y + A = 0$

3ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Sejam A, $B \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas cartesianas $(2,5)$ e $(1,3)$, vértices fixos de um conjunto de triângulos de área 12. Determine a equação do lugar geométrico do conjunto de pontos C, terceiro vértice destes triângulos.

OBSERVAÇÃO: A área é considerada positiva qualquer que seja a orientação do triângulo, de acordo com a definição axiomática.

4ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Seja $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto iz + 2 + 3i$$

Seja o conjunto $A = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$

Determine o conjunto B imagem de A pela função f.

5ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Sejam as regiões definidas pelos conjuntos de pontos A e B onde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < mx,\ m \in \mathbb{R}^+\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < ny,\ n \in \mathbb{R}^+\}$$

Determine a área do conjunto $C = A \cap B$.

6ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Sendo $x \in \mathbb{R}$, calcule:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x^2]{\cos x}$$

7ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Seja $a, b \in \mathbb{R}^+$. Mostre que a equação

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0$$

possue todas suas raízes reais, sendo uma no intervalo $]-b, 0[$ e a outra no intervalo $]0, a[$

8ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Divide-se um quadrado de lado 1 em nove quadrados iguais e remove-se o quadrado central. Procede-se da mesma forma com os 8 quadrados restantes. Este processo é realizado n vezes.

a) Quantos quadrados de lado $1/3^n$ são conservados ?

b) Qual a soma das áreas dos quadrados removidos quando n tende a infinito ?

IME - CEE - 1976 | ÁLGEBRA | 03

9ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:
São dados n pontos em um plano, supondo-se:

a) Cada três pontos quaisquer não pertencem a uma mesma reta;

b) Cada para de retas por eles determinado não é constituído por retas paralelas;

c) Cada três retas por eles determinadas não passam por um mesmo ponto.

Pede-se o número de interseções das retas determinadas por esses pontos distintos dos pontos dados.

10ª QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:
Seja $P_3(x) = (x+1)(x+3)(x+5) + k(x+2)(x+4)$, onde $x \in \mathbb{C}$. Determine o lugar geométrico das raízes de $P_3(x)$ quando k assume todos os valores em R^+, desenhando este lugar geométrico no plano complexo.

IME - CEE - 1976	RESOLVIDO	ÁLGEBRA	01

1ª QUESTÃO - ITEM 1

SOLUÇÃO

(i) Raízes do trinômio

$$x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

(ii) Domínio da função

$$f(x) = \log_2(x^2-x-1) \in \mathbb{R} \iff x^2 - x - 1 > 0 \iff \left| \begin{array}{l} x > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

RESPOSTA:

$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

1ª QUESTÃO - ITEM 2

SOLUÇÃO

(i) Fórmula de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k.$$

(ii) Cálculos

$f(x) = x \cdot \text{sen}\, x - e^x \cdot \cos x \Rightarrow f(0) = -1$

$f'(x) = x \cdot \cos x + \text{sen}\, x + e^x \cdot \text{sen}\, x - e^x \cdot \cos x \Rightarrow f'(0) = -1$

$f''(x) = -x \cdot \text{sen}\, x + \cos x + \cos x + e^x \cdot \text{sen}\, x + e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \cos x + e^x \text{sen}\, x \Rightarrow f''(0) = 2.$

(iii) Logo

$$f(x) = -1 - x + x^2.$$

RESPOSTA:

$f(x) = -1 - x + x^2$

2ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

Observamos que A é o produto das raízes da equação, logo

$$A = x_1^3 \cdot x_2^3 = (x_1 \cdot x_2)^3 = (ad-bc)^3 .$$

RESPOSTA:

$$A = (ad - bc)^3$$

3ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(i) Altura (h) dos triângulos

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot h$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$h = \frac{2S}{|\overline{AB}|} = \frac{24}{\sqrt{5}} .$$

(ii) Equação da reta AB

$$y - 3 = \frac{5-3}{2-1} \cdot (x-1) \iff \frac{2x - y + 1}{+\sqrt{5}} = 0$$

(iii) Distância de AB para C

$$P(x,y) \in LG \rightleftharpoons \left|\frac{2x-y+1}{\sqrt{5}}\right| = \frac{24}{\sqrt{5}} \iff$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} 2x - y - 23 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x - y + 25 = 0 . \end{array} \right.$$

RESPOSTA:

$$2x - y - 23 = 0$$

ou $$2x - y + 25 = 0$$

4ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(i) Do enunciado

$$f(x+yi) = i(x+yi) + 2 + 3i =$$

$$= (2-y) + (3+x)i = \bar{x} + \bar{y}i .$$

(ii) Da igualdade dos complexos

$$\begin{cases} \bar{x} = 2 - y \\ \bar{y} = 3 + x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2 - \bar{x} \\ x = \bar{y} - 3 \end{cases} .$$

(iii) Substituindo na equação de A

$$\frac{(\bar{y} - 3)^2}{9} + \frac{(2 - \bar{x})^2}{4} = 1,$$

elipse de centro O(2,3), semi-eixos iguais a 3 e 2, eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas.

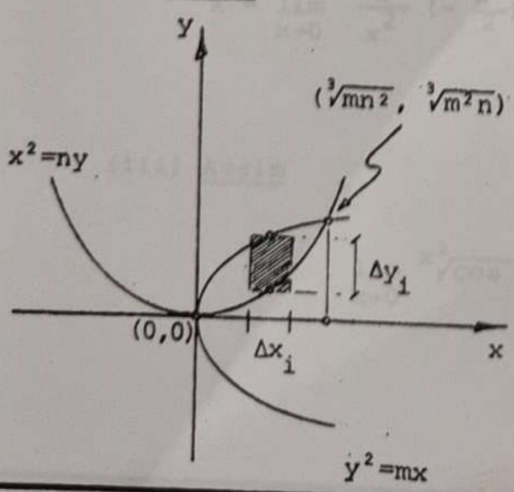
RESPOSTA:

$$B = \left\{(x+yi) \in \mathbb{C} \mid \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1\right\}$$

5ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(i) Esboço



(ii) Interseções

$$\begin{cases} y^2 = mx \\ x^2 = ny \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{n} \\ \dfrac{x^4}{n^2} = mx \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{array}{|l} x = 0 \\ y = 0 \\ \qquad \text{ou} \\ x = \sqrt[3]{nm^2} \\ y = \sqrt[3]{m^2n} \end{array} .$$

(iii) Cálculo

$$S_C = \int_0^{\sqrt[3]{mn^2}} \left(\sqrt{nx} - \frac{x^2}{n}\right) . dx =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{n}}{3} . x^{3/2} - \frac{x^3}{3n}\right]_0^{\sqrt[3]{mn^2}} = \frac{2}{3} . mn - \frac{1}{3}.mn = \frac{mn}{3} \text{ u.a.}$$

RESPOSTA:

$$S_C = \frac{mn}{3} \text{ u.a.}$$

6ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(i) Identificação

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos x} = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{\lambda} \quad \ldots \quad \boxed{1^{\infty}}$$

(ii) Cálculo de λ

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} . \ln(\cos x)$$

Equivalências:

$$(u \to 1) \Longrightarrow \ln u \sim u - 1$$

$$(v \to 0) \Longrightarrow 1 - \cos v \sim \frac{v^2}{2}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(- \frac{x^2}{2}\right) = - \frac{1}{2}$$

(iii) Assim

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos x} = e^{-1/2}$$

RESPOSTA:

$$\frac{1}{\sqrt{e}}$$

7ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(i) A equação

Sendo $x \neq 0$, $x \neq a$ e $x \neq b$

$$(x-a).(x-b)+x.(x-b)+x.(x-a) = 0 \iff$$

$$\iff 3x^2-2(a+b)x+ab = 0.$$

(ii) Discriminante

As raízes são reais. De fato

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4(a+b)^2 - 12ab = 4(a^2-ab+b^2)$$

$$\Delta \geq 0 \iff a^2 + b^2 - ab > 0 \iff$$

$$\iff a^2 + b^2 \geq ab, \text{ verdade, para todos } \underline{a} \text{ e } \underline{b}.$$

(iii) Não há raiz em (-b, 0)

De fato

$$x \in (-b,0) \implies \begin{cases} x < 0 \\ x - a < 0 \\ x - b < 0 \end{cases} \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} < 0.$$

(iv) Nem sempre existe raiz em (0, a)

$$x = 0 \implies 3x^2 - 2(a+b)x + ab = ab > 0$$

$$x = a \implies 3x^2 - 2(a+b)x + ab = a^2 - ab.$$

Pelo Teorema de Bolzano, existe um número ímpar de raízes reais em (0, a) se

$$a^2 - ab < 0 \iff a < b.$$

8ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(a) PG - Termo Geral

1ª operação	- restam	8	quadrados de lado $(1/3)$
2ª operação	- restam	8×8	quadrados de lado $(1/3)^2$
3ª operação	- restam	$8 \times 8 \times 8$	quadrados de lado $(1/3)^3$
....	......	....	....
nª operação	- restam	8^n	quadrados de lado $(1/3)^n$

(b) PG - Soma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 8^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{8/9}{1-8/9} = 1.$$

RESPOSTA:

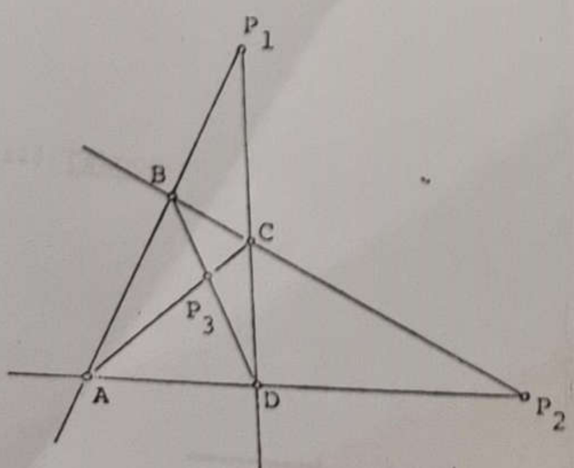
(a) 8^n quadrados

(b) $S = 1$

9ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(1) Observamos



Para cada 4 pontos escolhidos A, B, C e D, podemos desenhar 6 retas que determinam 3 interseções.

Logo:

(ii) Número (N) de interseções

$$N = 3 \times C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \cdot 3 = \frac{1}{8}(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n).$$

RESPOSTA:

$$N = \frac{1}{8}(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n)$$

10ª QUESTÃO

SOLUÇÃO

(i) As raízes são reais

De fato

$$f(-1) = 3k$$
$$f(-2) = -3$$
$$f(-4) = 3$$

Do Teorema de Bolzano, tem-se que existem raízes em $(-2,-1)$ e $(-4,-2)$. Sendo $P_3(x)$ do 3º grau, coeficientes reais, resulta que as três raízes são reais.

(ii) Analisando os sinais

$$-k = \frac{(x+1)(x+3)(x+5)}{(x+2)(x+4)} < 0 \implies \left| \begin{array}{l} x < -5 \\ \text{ou} \\ -4 < x < -3 \\ \text{ou} \\ -2 < x < -1. \end{array} \right.$$

(iii) Esboço