1a. QUESTÃO ÍTEM ÚNICO VALOR: 0,5

ENUNCIADO:

Determine as soluções da equação

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0,$$

dado que uma de suas raízes é a soma das outras duas.

SOLUÇÃO

Sejam α, β e γ as raízes da equação dada

sabe-se que $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\dfrac{5}{36} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{1}{36} \end{cases}$

Como, por hipótese, $\alpha + \beta = \gamma$, tem-se

$$2\gamma = \frac{1}{3} \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{6}$$

Logo dividindo-se o polimônio dado por $x = \frac{1}{6}$ tem-se:

$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = (36x^2 - 6x - 6)(x - \frac{1}{6})$. Logo

as raízes α e β serão as raízes da equação de 2º grau

$36x^2 - 6x - 6$ que são $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{1}{3}$.

Resp.: $-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

2a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 0,5

ENUNCIADO:

Seja um polinômio

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com coeficientes reais. Sabe-se que $p(0) = 0$, $p(2) = 4$, que a reta tangente a $p(x)$ no ponto $(1,1)$ é paralela à reta $y = 2x + 2$ e que a reta tangente a $p(x)$ no ponto $(2,4)$ é perpendicular à reta $y = -\frac{1}{3}x - 4$. Determine os coeficientes a_3, a_2, a_1, a_0.

SOLUÇÃO

$p(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$

$p(2) = 4 \Longrightarrow 4a_3 + 2a_2 + a_1 = 2$ (1)

continua .....

$p'(1) = 2 \Longrightarrow 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 2$ (2)

$p(1) = 1 \Longrightarrow a_3 + a_2 + a_1 = 1$ (3)

$p(2) = 4 \Longrightarrow$ equação 1

$p'(2) = 3 \Longrightarrow 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3$ (4)

De (1) - (2), $a_3 = 0$ (5)

De (4) - (3), $3a_2 = 2 \Longrightarrow a_2 = \frac{2}{3}$ (6)

De (2) - (3), $a_2 = 1$ (7)

De (6) e (7), o sistema é incompatível, não existe um polinômio satisfazendo às condições impostas.

3a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas, uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrer ambas):

a) existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se conhecem);

b) existem três pessoas que se desconhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se desconhecem).

SOLUÇÃO

Seja v uma qualquer das pessoas. v estará, necessáriamente, ligada a, no mínimo, 3 pessoas, por conhecimento ou por desconhecimento. (v conhece todas; v conhece 4 e desconhece 1; ...; v desconhece todas). Sem perda de generalidade, suponhamos que v conheça tres pessoas. n_1, n_2, n_3. Se quaisquer duas pessoas entre n_1, n_2, n_3 se conhecem, então estas duas, com v, formam o grupo de 3 pessoas que se conhecem. Se n_1, n_2, n_3 se desconhecem duas a duas, elas formam o grupo das 3 pessoas que se desconhecem mutuamente.

4a. QUESTÃO ÍTEM ÚNICO VALOR: 0,5

ENUNCIADO:

Seja h uma função contínua, real de variável real. Sabe-se que $h(-1) = 4$; $h(0) = 0$; $h(1) = 8$. Defino uma função g como $g(x) = h(x) - 2$. Prove que a equação $g(x) = 0$ admite, pelo menos, duas soluções distintas.

SOLUÇÃO

continua ...

Como $g(x) = h(x)-2$, sabe-se que g é contínua, por h e contínua por hipótese.

Tem-se
$$g(-1) = h(-1)-2 = 4-2 = 2$$
$$g(0) = h(0)-2 = 0-2 = -2$$
$$g(1) = h(1)-2 = 8-2 = 6$$

Logo, pelo teorema do valor intermediário, existe um número real α entre -1 e 0 tal que $g(\alpha)=0$ e existe um número real β entre 0 e 1 tal que $g(\beta)=0$.

5a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Seja o conjunto $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa, tal que $g(z) = (4 + 3i)z + 5 - i$.

Notação: $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos

$|z|$ é o valor absoluto de z.

SOLUÇÃO

Sabe-se que o conjunto A representa o circulo unitário de R^2 de centro na origem $x^2 + y^2 = 1$.

A aplicação
$$g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow (4+3i)z + 5 - i$$

Indica uma rotação de ângulo θ igual ao argumento de $4+3i$ seguida de uma trajetória de razão $\lambda = 4 + 3i = \sqrt{25} = 5$, seguida de uma translação de razão $5-i$.

Como o círculo fica invariante por rotação, f(A) será um novo circulo de raio 5 seja maior(logo raio igual -5) e centro no ponto (5, -1), ou seja, f(A) será o círculo.

$$\boxed{(x-5)^2 + (y+1)^2 = 25}$$ ou ainda

$$f(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z-5+i| = 5\}.$$

6a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Para $t > 0$ e $x \geq 1$, defino a função f_t, real de variável real, como:

$$f_t(x) = x\left[\frac{x^t - (t+1)}{t}\right].$$

Supondo-se que o limite indicado exista, define-se

$$f(x) = \lim_{t \to 0} f_t(x) \qquad , \; x \geq 1$$

Determine $f(e^2)$, onde e é a base dos logaritmos neperianos.

SOLUÇÃO

$$f(x) = \lim_{t \to 0} x \left[\frac{x^t - (t+1)}{t}\right]$$

Se $x = 0$, $f(x) = 0$

Se $x \neq 0$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t \to 0}\left[\dfrac{x^t - (t+1)}{t}\right]$

Aplicando a regra de l'Hoppital,

$$h(x) = \frac{\lim\limits_{t \to 0}\left[x^t \; \ln x - 1\right]}{\lim\limits_{t \to 0} 1}$$

$h(x) = \ln x - 1$

$f(x) = x\,(\ln x - 1)$

$f(e^2) = e^2(\ln e^2 - 1) = e^2$

7a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Sejam A, B, C, D matrizes reais 2 x 2.

$A = (a_{ij})$; $A^{-1} = B = (b_{ij})$

$C = (c_{ij})$; $c_{ij} = a_{ij}^{-1}$

$D = (d_{ij})$; $d_{ij} = b_{ij}^{-1}$

Sabe-se que $a_{ij}\, b_{ij} \neq 0$, $1 \leq i \leq 2$; $1 \leq j \leq 2$, e que C é matriz singular (não admite inversa). Calcule o determinante de D.

SOLUÇÃO

Det C = 0, porque C é singular

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \frac{1}{a_{12}} \\ \frac{1}{a_{21}} & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det } C = \frac{1}{a_{11}\ a_{22}} - \frac{1}{a_{21}\ a_{12}} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{11}\ a_{22}} = \frac{1}{a_{21}\ a_{12}}$$

$$a_{11}\ a_{22} = a_{21}\ a_{12}$$

Mas Det A = $a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{22}$ não pode ser igual a zero, porque A, por hipótese, é não singular.
Há inconsistência nos dados, o problema não tem solução.

8a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR 0,5

ENUNCIADO:

Seja m uma função real de variável real definida como:

$$m(x) = |7 - x|$$

Diz-se que uma função u, real de variável real, é contínua no ponto a de seu conjunto de definição se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que, se y é ponto do conjunto de definição de u e se $|y - a| < \delta$, então $|u(y) - u(a)| < \varepsilon$. Quer-se testar a continuidade de m no ponto $x = -2$. Escolhe-se um $\varepsilon = 0{,}01$. Determine um δ conveniente, para este valor de ε. Justifique sua resposta.

Notação: $|h|$ é o valor absoluto de h.

SOLUÇÃO

$m(y) = |7 - y|$; $m(-2) = 9$

$$|m(y) - m(-2)| = ||7 - y| - 9| \qquad (1)$$

Se $7 - y > 0$, $|m(y) - m(-2)| = |(7-y)-9|$ (2)

$7 - y < 0$, $|m(y) - m(-2)| = |y - 7 - 9|$ (3)

continua ....

De (2), $|-2 - y| = |m(y) - m(-2)|$ (4)

De (3), $|y - 16| = |m(y) - m(-2)|$ (5)

Ora, dado $\varepsilon = 0{,}01$, escolhe $0 < \delta \leqslant 0{,}01$. Assim, se

$$|y - (-2)| < 0{,}01 \ , \ |-y - 2| < 0{,}01 \qquad (6)$$

Mas $|-y - 2| < 0{,}01$ (y está 0,01 próximo de -2). Assim, $7 - y > 0$, e valem (2) e (4).

De (4) e (6)

$|m(y) - m(-2)| = |-2 - y| < 0{,}01.$

Isto mostra que, $\forall_y \in \mathbb{R}$, se $|y - (-2)| < 0{,}01$, então $|m(y) - m(-2)| < 0{,}01$ e, para $\varepsilon = 0{,}01$ foi possível achar um δ ($\leqslant 0{,}01$) para verificar a condição de continuidade de m.

Resposta: 0 0,01.

9a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

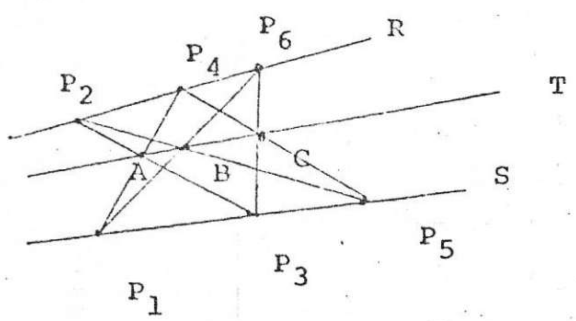
Sejam R e S duas retas quaisquer. Sejam $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_4 = (x_4, y_4)$, $P_6 = (x_6, y_6)$ três pontos distintos sobre R e $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, $P_5 = (x_5, y_5)$ três pontos distintos sobre S. O segmento P_2P_3 não é paralelo ao segmento P_1P_4, o segmento P_1P_6 não é paralelo ao segmento P_2P_5 e o segmento P_3P_6 não é paralelo ao segmento P_4P_5 Sejam:

A, a interseção dos segmentos P_2P_3 e P_1P_4,

B, interseção de P_1P_6 com P_2P_5 e

C, interseção de P_3P_6 com P_4P_5. Prove que os pontos A, B e C estão em linha reta.

SOLUÇÃO



Dadas as coordenadas dos pontos P_i (=1, ..6) determina-se as equações das retas:

P_1P_6, P_1P_4, P_2P_3, P_2P_5, P_3P_6, P_4P_5 e a seguir determina-se as soluções dos três sistemas

$$\begin{cases} A = P_1P_4 \cap P_2P_3 \\ B = P_1P_6 \cap P_2P_5 \\ C = P_3P_6 \cap P_4P_5 \end{cases}$$

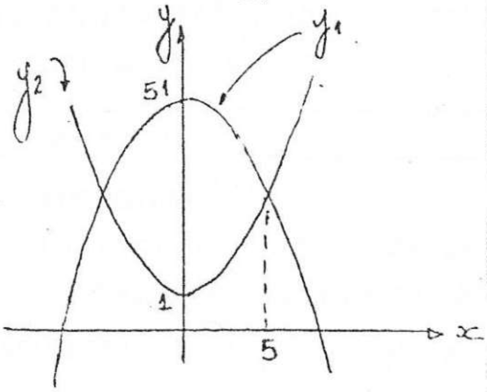
e verifica-se que esses pontos estão alinhados.

10a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Dadas as parábolas y_1 e y_2, $y_1(x) = 51 - x^2$ e $y_2(x) = x^2+1$, sabe-se que a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 0$ e $x = 5$ é igual a 3 vezes a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 5$ e $x = a$.

Determine a.



SOLUÇÃO

$$y_1 = 51 - x^2$$

$$y_2 = x^2 + 1$$

$$51-x^2 = x^2 + 1 \;:$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 15$$

a) ÁREA ENTRE Y_1 e y_2 entre $x = 0$ e $x = 5$

$$S_1 = \int_0^5 (y_1 - y_2)\,dx = \int_0^5 (51 - x^2 - (x^2 + 1))\,dx = \int_0^5 (50-2x^2)\,dx$$

b) ÁREA ENTRE y_1 e y_2 entre $x=5$ e $x=a$

$$S_2 = \int_5^a (y_2 - y_1)\,dx = \int_5^a (x^2 + 1 - (51-x^2))\,dx = \int_5^a (2x^2-50)\,dx$$

Sabemos que $S_1 = 3S_2$

$$\int_0^5 (50-2x^2)\,dx = 3\int_5^a (2x^2 - 50)\,dx$$

continuação ..

$$\left[50x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^5 = 3\left[\frac{2}{3}x^3 - 50s\right]_5^a$$

$$250 - \frac{250}{3} = 3\left[\frac{2}{3}a^3 - 50a - \left(\frac{250}{3} - 250\right)\right].$$

$$\frac{500}{3} = \cancel{3}\left[\frac{2a^3 - 150\,a - 250 + 750}{\cancel{3}}\right] = 2a^3 - 150a + 500$$

$$500 = 6a^3 - 450a + 1500$$

$$6a^3 - 450a + 1000 = 0 \quad \text{ou} \quad 3a^3 - 225a + 500 = 0$$

Trata-se portanto de achar o valor de a, soluções de uma eq. do 3º grau.

Pelo enunciado do problema, $a > 5$.

Seja $f(a) = 3a^3 - 225a + 500$ como $f(7 < 0$ e $f(8) > 0$, a solução está entre <u>7</u> e <u>8</u>.

11a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Se $x(t)$ é o número de parasitas existentes, no tempo t, em uma população hospedeira $y(t)$, a relação entre as duas populações pode ser descrita por $y^A\ e^{By} = k\ x^R\ e^{Sx}$

onde A, B, R e S são constantes apropriadas. Pede-se determinar $\dfrac{dy}{dx}$.

SOLUÇÃO

$x(t)$ $y(t)$, A, B, R e S = constantes.

$$y^A\, e^{By} = K\, x^R\, e^{Sx} \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Derivando ambos os membros de (1) em relação a t:

$$y^A\, e^{By}\, B\, \frac{dy}{dt} + e^{By}\, A\, y^{A-1}\, \frac{dy}{dt} = Kx^R e^{Sx}\, S\, \frac{dx}{dt} + Ke^{Sx} R x^{R-1}\, \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}\left[e^{By}\, y^{A-1}\, (By + A)\right] = \frac{dx}{dt}\left[K\, e^{Sx}\, x^{R-1}\, (Sx + R)\right]$$

$$\frac{dy}{dt} \Big/ dx/dt = \frac{k\, e^{Sx}\, x^{R-1}\, (Sx + R)}{e^{By}\, y^{A-1}\, (By + A)}$$

(multiplicando o numerador e o denominador por xy).

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{k\, e^{Sx}\, x^R\,(Sx + R)}{x\, c^{By}\, y^A\,(By + A)} = \frac{y}{x} \cdot \frac{Sx + R}{By + A}$$

12a. QUESTÃO: ÍTEM ÚNICO VALOR: 1,0

ENUNCIADO:

Uma seqüência $(x_n)_{n \in N^*}$ de números racionais diz-se regular se $|x_m - x_n| \leqslant m^{-1} + n^{-1}$, $m, n \in N^*$. Dada uma seqüência regular $t = (t_n)_{n \in N^*}$, defino k_t = menor inteiro maior que $|t_1| + 2$.

Sejam x e y seqüências regulares e K = máximo $\{k_x, k_y\}$. Defino a seqüência $z = (Z_n)_{n \in N^*}$ como $z_n = x_{2kn} \cdot y_{2kn}$., $n \in N^*$. Prove que $(z_n)_{n \in N^*}$ é uma seqüência regular.

<u>NOTAÇÃO</u>: N^* é o conjunto dos naturais sem o número zero, isto é, $N^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$

<u>SOLUÇÃO</u>

Sabe-se que $(Z_m - Z_n) = (x_{2km} \cdot y_{2km} - x_{2kn} \cdot y_{2kn}) = x_{2km}(y_{2km} - y_{2kn}) + y_{2kn}(x_{2km} - x_{2kn})$.

Logo: $|Z_m - z_n| \leqslant |x_{2km}|\ |y_{2km} - y_{2kn}| + |y_{2km}|\ |x_{2km} - x_{2kn}|$ (1)

Mas, por ser regular, têm-se:

$$|x_1 - x_r| \leqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{r} \leqslant 2$$

$|x_1 - x_r| \leqslant 2$ Mas $|x_r| - |x_1| \leqslant |x_1 - x_r| \leqslant 2$

Logo $|x_r| \leqslant |x_1| + 2 \leqslant k_x$, $\forall r \in N^*$ (2)

De modo análogo $|y_r| \leqslant |y_1| + 2 \leqslant k_y$, $\forall r \in N^*$ (3)

continua ....

De 2 e 3, $|x_{2km}| < k_x \leqslant k$ (4)

$|y_{2kn}| < k_y \leqslant k$ (5)

Por serem x e y regulares, têm-se que

$$|x_{2km} - x_{2kn}| \leqslant \frac{1}{2km} + \frac{1}{2kn} \quad (6)$$

$$|y_{2km} - y_{2km}| \leqslant \frac{1}{2km} + \frac{1}{2km} \quad (7)$$

Substituindo-se 4, 5, 6 e 7 em 1, tem-se:

$$|zm - zn| \leqslant k\left(\frac{1}{2km} + \frac{1}{2km}\right) + k\left(\frac{1}{2km} + \frac{1}{2km}\right) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

Conseqüentemente, z é regular.