1a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (0,5 ponto)

ENUNCIADO:

Determine as soluções da equação

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0,$$

dado que uma de suas raízes é a soma das outras duas.

SOLUÇÃO

Sejam as raízes a, b e c.

$$\begin{cases} a = b + c \quad \dots\dots\dots\dots (1) \\ a + b + c = \dfrac{1}{3} \quad \dots\dots\dots (2) \\ ab + ac + bc = \dfrac{5}{36} \quad \dots (3) \\ abc = -\dfrac{1}{36} \quad \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

$$(1) \text{ e } (2) \implies 2a = \frac{1}{3} \iff a = \frac{1}{6};$$

$$(1) \text{ e } (3) \implies \begin{cases} b + c = \dfrac{1}{6} \\ b \cdot c = -\dfrac{1}{6} \end{cases} \implies z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6} = 0 \iff \left| \begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ z = -\dfrac{1}{3}. \end{array} \right.$$

RESPOSTA:

$\dfrac{1}{6}, \quad \dfrac{1}{2}, \quad -\dfrac{1}{3}.$

IME-CEE/1977/8	ÁLGEBRA		Fôlha 2

QUESTÃO

ITEM ÚNICO (0,5 ponto)

ENUNCIADO:

Seja um polinômio

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

com coeficientes reais. Sabe-se que $p(0) = 0$, $p(2) = 4$, que a reta tangente a $p(x)$ no ponto $(1,1)$ é paralela à reta $y = 2x + 2$ e que a reta tangente a $p(x)$ no ponto $(2,4)$ é perpendicular à reta $y = -\frac{1}{3}x - 4$. Determine os coeficientes a_3, a_2, a_1, a_0.

SOLUÇÃO

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$$

Do enunciado:

$$p(0) = 0 \implies a_0 = 0$$

$$p'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 2$$

$$p'(2) = 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3$$

$$p(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 4$$

$$p(1) = a_3 + a_2 + a_1 = 1.$$

Formando o sistema:

$$\begin{aligned} 3a_3 + 2a_2 + a_1 &= 2 \\ 12a_3 + 4a_2 + a_1 &= 3 \\ 4a_3 + 2a_2 + a_1 &= 2 \\ a_3 + a_2 + a_1 &= 1. \end{aligned}$$

Determinante principal:

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 12 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

(Continuação da solução da 2a. Questão, Item Único).

Determinante característico:

$$S_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 12 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{sistema impossível (Teor.Rouché)}$$

RESPOSTA:

Não existem valores dos coeficientes que satisfaçam às condições do enunciado.

3a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas, uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrer ambas):

a) existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se conhecem);

b) existem três pessoas que se desconhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se desconhecem).

SOLUÇÃO

(1) Considere: (i) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 as 6 pessoas em reunião.

(ii) $\begin{cases} a_i \text{ conhece } a_j \iff (a_i, a_j) = 1 \\ a_i \text{ não conhece } a_j \iff (a_i, a_j) = 0 \end{cases}$, para $\begin{matrix} i = 1, \dots, 6 \\ j = 1, \dots, 6 \end{matrix}$; $i \neq j$.

Existem $C_6^3 = 20$ grupos de 3 pessoas.

(2) Tentaremos preencher as relações entre as pessoas de cada grupo, de maneira a negar a tese. Caso isso não seja possível para todos os grupos, obviamente, a tese estará demonstrada.

(3) Considere a_{i_1}, a_{i_2} e a_{i_3} um grupo qualquer.

Temos: $\begin{cases} (a_{i_1}, a_{i_2}) = 1 \dots (1) \\ (a_{i_1}, a_{i_3}) = 1 \dots (2) \\ (a_{i_2}, a_{i_3}) = 0 \dots (3) \end{cases}$ OBS.: A hipótese $\begin{cases} (a_{i_1}, a_{i_2}) = 0 \\ (a_{i_1}, a_{i_3}) = 0, \\ (a_{i_2}, a_{i_3}) = 1 \end{cases}$ é a dual e, portanto, o raciocínio é análogo.

Considere uma outra pessoa a_{i_j}, $j \in \{4, 5, 6\}$.

(i) Supor $(a_{i_1}; a_{i_j}) = 1 \dots (4)$

de (1) e (4), seguindo a orientação (2), temos: $(a_{i_2}, a_{i_j}) = 0 \dots (5)$

de (2) e (4), seguindo a orientação (2), temos: $(a_{i_3}, a_{i_j}) = 0 \dots (6)$.

Assim: (3), (5) e (6) $\Longrightarrow$ tese.

(ii) Supor o complementar de (i), ou seja: $\begin{matrix} (a_{i_1}, a_{i_4}) = 0 \dots (7) \\ (a_{i_1}, a_{i_5}) = 0 \dots (8) \\ (a_{i_1}, a_{i_6}) = 0 \dots (9); \end{matrix}$

de (7) e (8) seguindo (2): $(a_{i_4}, a_{i_5}) = 1 \dots (10)$

de (7) e (9) seguindo (2): $(a_{i_4}, a_{i_6}) = 1 \dots (11)$

de (8) e (9) seguindo (2): $(a_{i_5}, a_{i_6}) = 1 \dots (12)$.

Assim (10), (11) e (12) $\Longrightarrow$ tese.

RESPOSTA: Conclusão: Por (2) e (3) temos que, necessariamente, a hipótese (a) ou a hipótese (b) ocorrem.

IME-CEE/1977/8	ÁLGEBRA		Fôlha 5

4a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (0,5 ponto)

ENUNCIADO:

Seja h uma função contínua, real de variável real. Sabe-se que $h(-1) = 4$; $h(0) = 0$; $h(1) = 8$. Defino uma função g como $g(x) = h(x) - 2$. Prove que a equação $g(x) = 0$ admite, pelo menos, duas soluções distintas.

SOLUÇÃO

Tem-se:

$$h(-1) = 4 \implies g(-1) = 4 - 2 = 2 > 0$$

$$h(0) = 0 \implies g(0) = 0 - 2 = -2 < 0$$

$$h(1) = 8 \implies g(1) = 8 - 2 = 6 > 0$$

Teorema de Bolzano:

(i) $g(-1).g(0) < 0 \implies$ existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $(-1, 0)$;

(ii) $g(0).g(1) < 0 \implies$ existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $(0, 1)$.

Logo existem, pelo menos, duas raízes (soluções) reais distintas para a equação $g(x) = 0$.

RESPOSTA:

Demonstração

IME-CEE/1977/8	ÁLGEBRA		Fôlha 6

5a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Seja o conjunto

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa, tal que $g(z) = (4 + 3i)z + 5 - i$

Notação: $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.

$|z|$ é o valor absoluto de z.

SOLUÇÃO

PRIMEIRA

Façamos:

$$z = a + bi$$

$$g(z) = x + yi.$$

Temos:

$$g(z) = x + yi = (4+3i)(a+bi)+5-i =$$

$$= (4a-3b+5)+(4b+3a-1)i.$$

Da igualdade dos complexos:

$$\begin{cases} 4a - 3b + 5 = x \\ 4b + 3a - 1 = y \end{cases} \iff \begin{cases} 12a - 9b + 15 = 3x \\ 16b + 12a - 4 = 4y \end{cases}$$

$$25b - 19 = 4y - 3x$$

$$\iff \begin{cases} b = \dfrac{4y - 3x + 19}{25} \\ a = \dfrac{3y + 4x - 17}{25} \end{cases}.$$

Como $|z| = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$, logo:

$$\left(\frac{4x + 3y - 17}{25}\right)^2 + \left(\frac{4y - 3x + 19}{25}\right)^2 = 1 \iff$$

$\iff (x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 25$, equação de uma circunferência de círculo de centro $C(5, -1)$ e raio $R = 5$.

IME-CEE/1977/8 | ÁLGEBRA

(Continuação da solução da 5a. Questão, Item Ônico).

SEGUNDA

A função dada corresponde a uma roto-homotetia (correspondente a multiplicação por $4 + 3i$) e uma translação (correspondente à soma com $5 - i$). Daí, como $|4 + 3i| = 5$, a circunferência A transforma-se numa circunferência de raio 5 vezes maior e centro $(5,-1)$.

Daí,

$$g(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-5)^2 + (y+1)^2 = 5^2\}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-(5-i)| = 5 \}$$

RESPOSTA:

$\{(x,y) \in \mathbb{C} \mid (x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$

IME-CEE/1977/8 ÁLGEBRA ... Folha 8

3. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Para $t > 0$ e $x > 1$, defino a função f_t, real de variável real, como:

$$f_t(x) = x\left[\frac{x^t - (t+1)}{t}\right]$$

Supondo-se que o limite indicado exista, define-se

$$f(x) = \lim_{t \to 0} f_t(x) \quad , \quad x > 1$$

Determine $f(e^2)$, onde e é a base dos logaritmos neperianos.

SOLUÇÃO

$$f_t(x) = x \cdot \left[\frac{x^t - 1 - t}{t}\right]$$

Cálculo de $f(x) = \lim\limits_{t \to 0} f_t(x)$

1ª solução: equivalência

quando $t \to 0$ $\quad u^t - 1 \sim t.\ln u$

logo

$$f(x) = \lim_{t \to 0} x \cdot \left[\frac{t \cdot \ln x - t}{t}\right] \Longrightarrow f(x) = x(\ln x - 1)$$

2ª solução: L'HÔPITAL

$$f(x) = \lim_{t \to 0} x \cdot \left[\frac{x^t - 1 - t}{t}\right] = \lim_{t \to 0} x \cdot \left[\frac{x^t \ln x - 1}{1}\right]$$ (derivando-se em relação a t)

$$\Rightarrow f(x) = x(\ln x - 1)$$

Logo $f(e^2) = e^2(\ln e^2 - 1) = e^2 \cdot (2 - 1) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(e^2) = e^2$

RESPOSTA:

$$f(e^2) = e^2$$

IME-CEE/1977/8	ÁLGEBRA	?,	Fôlha 10

a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Sejam A, B, C D matrizes reais 2 x 2.

$A = (a_{ij})$; $A^{-1} = B = (b_{ij})$

$C = (c$; $c_{ij} = a_{ij}^{-1}$

$D = (d_{ij})$; $d_{ij} = b_{ij}^{-1}$

abe-se que $a_{ij}\ b_{ij} \neq 0$, $1 \leq i \leq 2$; $1 \leq j \leq 2$, e que C é atriz singular (não admite inversa). Calcule o determinante de D.

SOLUÇÃO

C é matriz singular $\Longrightarrow |C| = 0$

mas $|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = 0$

mas $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_{11}} & \frac{1}{c_{12}} \\ \frac{1}{c_{21}} & \frac{1}{c_{22}} \end{vmatrix} = \frac{1}{c_{11}} \cdot \frac{1}{c_{22}} - \frac{1}{c_{21}} \cdot \frac{1}{c_{12}}$

$\Longrightarrow |A| = \dfrac{c_{21} \cdot c_{12} - c_{11} \cdot c_{22}}{c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{12} \cdot c_{21}} = 0$ $\Longrightarrow$ A é matriz singular

$\Longrightarrow$ A não admite inversa

$\Longrightarrow$ não existe a matriz B

$\Longrightarrow$ não existe a matriz D

RESPOSTA:

Impossível, pois não existe a matriz D.

IME-CEE/ 1977/78	ÁLGEBRA

QUESTÃO

ITEM ÚNICO (0,5 ponto)

ENUNCIADO:

Seja m uma função real de variável real definida como:

$$m(x) = |7 - x|$$

Diz-se que uma função u, real de variável real, é contínua no ponto a de seu conjunto de definição se, para todo número real $\epsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que, se y é ponto do conjunto de definição de u e se $|y - a| < \delta$, então $|u(y) - u(a)| < \epsilon$.

Quer-se testar a continuidade de m no ponto $x = -2$. Escolhe-se um $\epsilon = 0,01$. Determine um δ conveniente, para este valor de ϵ. Justifique sua resposta.

Notação: $|h|$ é o valor absoluto de h.

SOLUÇÃO

Numa vizinhança de -2: $m(x) = 7 - x$.

Assim:

$$|m(x) - m(-2)| = |7 - x - 9| = |-x - 2| = |x + 2|.$$

Finalmente:

$$|x - (-2)| = |x + 2| < 0,01 \implies |m(x) - m(-2)| < 0,01,$$

isto é: $\delta = \varepsilon = 0,01$.

RESPOSTA:

$\delta = \varepsilon = 0,01.$

IME-CEE/1977/8	ÁLGEBRA		Fôlha 14

9a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Sejam R e S duas retas quaisquer. Sejam $P_2 = (x_2, y_2)$; $P_4 = (x_4, y_4)$; $P_6 = (x_6, y_6)$ três pontos distintos sobre R e $P_1 = (x_1, y_1)$; $P_3 = (x_3, y_3)$; $P_5 = (x_5, y_5)$ três pontos distintos sobre S. O segmento P_2P_3 não é paralelo ao segmento P_1P_4; o segmento P_1P_6 não é paralelo ao segmento P_2P_5 e o segmento P_3P_6 não é paralelo ao segmento P_4P_5. Sejam:

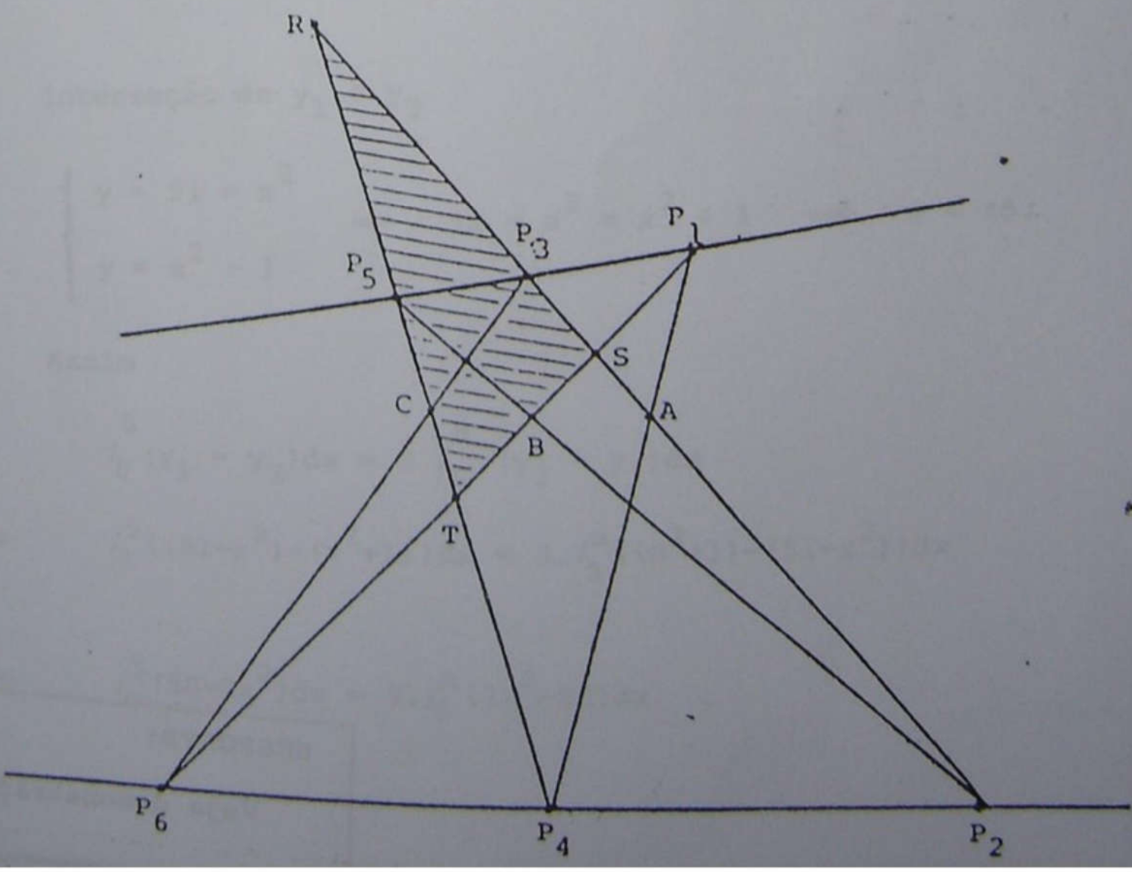
A, a interseção dos segmentos P_2P_3 e P_1P_4;

B, interseção de P_1P_6 com P_2P_5 e

C, interseção de P_3P_6 com P_4P_5. Prove que os pontos A, B e C estão em linha reta.

SOLUÇÃO

Fazendo $P_2P_3 \cap P_4P_5 = \{R\}$
$P_2P_3 \cap P_1P_6 = \{S\}$, e
$P_4P_5 \cap P_1P_6 = \{T\}$, vem:



(Continuação da solução da 9a. Questão, Item Ônico).

Aplicando Menelaus ao ΔRST, considerando os pontos colineares indicados, vem:

P_6, C e P_3:	$TC \cdot SP_6 \cdot RP_3 = TP_6 \cdot SP_3 \cdot RC$	(1)
P_2, B e P_5:	$TP_5 \cdot SB \cdot RP_2 = TB \cdot SP_2 \cdot RP_5$	(2)
P_1, A e P_4:	$TP_4 \cdot SP_1 \cdot RA = TP_1 \cdot SA \cdot RP_4$	(3)
P_2, P_4 e P_6:	$TP_6 \cdot RP_4 \cdot SP_2 = TP_4 \cdot RP_2 \cdot SP_6$	(4)
P_1, P_3 e P_5:	$TP_1 \cdot RP_5 \cdot SP_3 = TP_5 \cdot RP_3 \cdot SP_1$	(5)

Multiplicando as equações de (1) a (5) termo a termo e simplificando, vem:

$$TC \cdot SB \cdot RA = TB \cdot SA \cdot RC,$$

ou seja, A, B e C estão alinhados.

RESPOSTA:

Veja demonstração.

IME-CEE/1977/8 ÁLGEBRA

10a. QUESTÃO

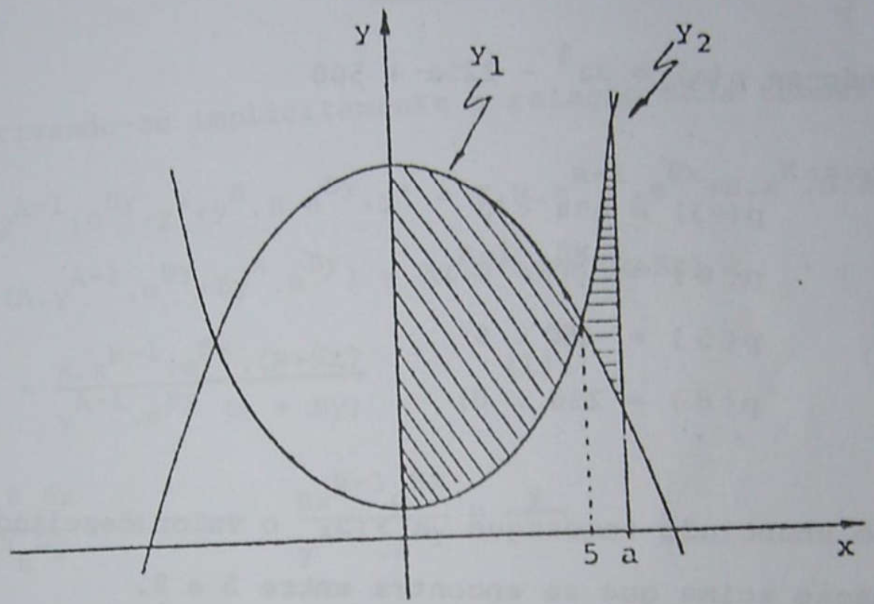
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Dadas as parábolas y_1 e y_2, $y_1(x) = 51 - x^2$ e $y_2(x) = x^2 + 1$, sabe-se que a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 0$ e $x = 5$ é igual a 3 vezes a área entre y_1 e y_2, medida entre $x = 5$ e $x = a$.

Determine a.

SOLUÇÃO



Interseção de y_1 e y_2

$$\begin{cases} y = 51 - x^2 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Longrightarrow 51 - x^2 = x^2 + 1 \Longrightarrow x = \pm 5.$$

Assim

$$\int_0^5 (y_1 - y_2)dx = 3 \int_5^a (y_2 - y_1)dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^5 ((51-x^2)-(x^2+1))dx = 3.\int_5^a ((x^2+1)-(51-x^2))dx$$

$$\Longrightarrow \int_0^5 (50-2x^2)dx = 3.\int_5^a (2x^2-50)dx$$

IME-CEE/1977/8	ÁLGEBRA		Fôlha 18

(Continuação da solução da 10a. Questão, Item Único).

$$\Longrightarrow \quad 50x - \frac{2x^3}{3}\Big]_0^5 = 3 \cdot \left(\frac{2x^2}{3} - 50x\right)\Big]_5^a$$

$$\Longrightarrow \quad 3a^3 - 225a + 500 = 0.$$

Definindo-se $p(a) = 3a^3 - 225a + 500$

temos que:

$$p(-3) = -94 < 0$$

$$p(0) = 500 > 0$$

$$p(5) = -250 < 0$$

$$p(8) = 236 > 0;$$

como do enunciado temos que $a > 5$, o valor desejado é a raiz da equação acima que se encontra entre 5 e 8.

RESPOSTA:

$5 < a < 8.$

IME-CEE/1977/8 | ÁLGEBRA

11a. QUESTÃO
ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Se $x(t)$ é o número de parasitas existentes, no tempo t, em uma população hospedeira $y(t)$, a relação entre as duas populações pode ser descrita por

$$y^A e^{By} = k x^R e^{Sx}$$

onde A, B, R e S são constantes apropriadas. Pede-se determinar $\frac{dy}{dx}$.

SOLUÇÃO

Derivando-se implicitamente a relação dada temos:

$$A.y^{A-1}.e^{By}.y'+y^A.B.e^{By}.y' = K.R.x^{R-1}.e^{Sx}+K.x^R.S.e^{Sx}$$

$$\Longrightarrow \quad y'(A.y^{A-1}.e^{By}+By^A.e^{By}) = Kx^{R-1}.e^{Sx}(R+Sx)$$

$$\Longrightarrow \quad y' = \frac{K.x^{R-1}.e^{Sx}.(R+Sx)}{y^{A-1}.e^{By}(A+By)} \qquad (1)$$

mas $\frac{Kx^R e^{Sx}}{y^A e^{By}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{Kx^{R-1}e^{Sx}}{y^{A-1}.e^{By}} = \frac{y}{x}$

logo de (1) temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(R+Sx)}{x(A+By)}.$$

RESPOSTA: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(R+Sx)}{x(A+By)}$

IME-CEE/1977/8	ÁLGEBRA		Fôlha 21

12a. QUESTÃO

ITEM ÚNICO (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Uma sequência $(x_n)_{n \in N^*}$ de números racionais diz-se regular se $|x_m - x_n| < m^{-1} + n^{-1}$, $m,n \in N^*$. Dada uma sequência regular $t = (t_n)_{n \in N^*}$, defino K_t = menor inteiro maior que $|t_1| + 2$.

Sejam x e y sequências regulares e K = máximo $\{K_x , K_y\}$. Defino a sequência $z = (z_n)_{n \in N^*}$ como $z_n = x_{2kn} \cdot y_{2kn}$, $n \in N^*$. Prove que $(z_n)_{n \in N^*}$ é uma sequência regular.

Notação: N^* é o conjunto dos naturais sem o número zero, isto é,

$N^* = \{1,2,3,\ldots\}$

SOLUÇÃO

$$z_n = x_{2kn} \cdot y_{2kn}$$

logo

$$\begin{aligned}
|z_m - z_n| &= |x_{2km} \cdot y_{2km} - x_{2kn} \cdot y_{2kn}| = \\
&= |x_{2km} \cdot y_{2km} - x_{2km} \cdot y_{2kn} + x_{2km} \cdot y_{2kn} - x_{2kn} \cdot y_{2kn}| \leq \\
&\leq |x_{2km} \cdot y_{2km} - x_{2km} \cdot y_{2kn}| + |x_{2km} \cdot y_{2kn} - x_{2kn} \cdot y_{2kn}| = \\
&= |x_{2km}| \cdot |y_{2km} - y_{2kn}| + |y_{2kn}| \cdot |x_{2km} - x_{2kn}| \leq \\
&\leq |x_{2km}| \cdot ((2km)^{-1} + (2kn)^{-1}) + |y_{2kn}| \cdot ((2km)^{-1} + (2kn)^{-1}) = \\
&= ((2km)^{-1} + (2kn)^{-1}) \cdot (|x_{2km}| + |y_{2kn}|)
\end{aligned}$$

daí temos que

$$|z_m - z_n| \leq \frac{(m^{-1} + n^{-1})}{2k} \cdot (|x_{2km}| + |y_{2kn}|) \qquad (1)$$

IME-CEE/1977	ÁLGEBRA	

(Continuação da solução da 12a. Questão, Item Único).

mas se t é regular tem-se que

$$|t_n - t_1| \leq \frac{1}{n} + 1 \leq 2$$

$$\Longrightarrow |t_n| - |t_1| \leq |t_n - t_1| \leq 2$$

$$\Longrightarrow |t_n| \leq |t_1| + 2 \leq k_t$$

logo

$$\left.\begin{array}{l} |x_{2km}| \leq k_x \leq k \\ |y_{2kn}| \leq ky \leq k \end{array}\right\} \Longrightarrow |x_{2km}| + |y_{2kn}| \leq 2k$$

assim de (1) temos

$$|z_m - z_n| \leq \frac{m^{-1} + n^{-1}}{2k} \cdot 2k$$

$$\Longrightarrow |z_m - z_n| \leq m^{-1} + n^{-1}$$

$$\Longrightarrow z_n \text{ é regular.}$$

RESPOSTA:

Demonstração