IME-CEE/1978/9 | ÁLGEBRA | Folha 1

1ª QUESTÃO

ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Admita $Y = \{a, b, c\}$ e seja a função $h: Y \times Y \to Y$ definida por:

$h(a,a) = a$ | $h(b,a) = b$ | $h(c,a) = c$
$h(a,b) = b$ | $h(b,b) = c$ | $h(c,b) = a$
$h(a,c) = c$ | $h(b,c) = a$ | $h(c,c) = b$

Considere uma função $f: \mathbb{Z} \to Y$ tal que:

$f(0) = a$

$f(1) = b$

e $\forall\ n, m \in \mathbb{Z}$, $f(n+m) = h(f(n), f(m))$.

Sabe-se que $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $f(3n) = a$.

i) Determine $y \in Y$, tal que $h(y, f(52)) = f(45)$;

ii) encontre um $H \subset \mathbb{Z}$, tal que $f(H) = \{c\}$.

SOLUÇÃO

$f(3n) = a$ e $f(1) = b$

$\Longrightarrow f(3n+1) = h(f(3n), f(1)) = h(a,b) = b \Longrightarrow f(3n+1) = b$

$f(3n+2) = h(f(3n+1), f(1)) = h(b,b) = c \Longrightarrow f(3n+2) = c$

(i) $52 = 3 \times 17 + 1 \Longrightarrow f(52) = b$

$45 = 3 \times 15 \Longrightarrow f(45) = a$

$\Longrightarrow h(y,b) = a \Longleftrightarrow \boxed{y = c}$

(ii) $f(H) = \{y \in Y \mid y = f(x);\ x \in H\}$

se $f(H) = \{c\} \Longrightarrow H = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = c\}$

do item anterior, temos que $f(x) = c \Longleftrightarrow x = 3n + 2;\ n \in \mathbb{Z}$

logo

$H = \{3n + 2;\ n \in \mathbb{Z}\}$

RESPOSTA:

(i) $y = c$

(ii) $H = \{3n+2,\ n \in \mathbb{Z}\}$

IME-CEE/1978/9 | ÁLGEBRA | | Folha 3

2ª QUESTÃO

ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determine x, sabendo-se que existe uma matriz inversível P, tal que $A = P^{-1}.B.P$.

SOLUÇÃO

(i) Determinação dos possíveis valores de x:

$A = P^{-1}.B.P \implies \det(A) = \det(P^{-1}).\det(B).\det(P) \implies \det(A) = \det(B)$

$\det(A) = -(x-2).(1+x)$ e $\det(B) = 0$

logo os possíveis valores de x são 2 e -1.

(ii) Verificação:

Fazendo-se $P = (p_{ij})$ em $PA = BP$ resulta, para $x = 2$ e $x = -1$, que a matriz P é não inversível ($\det(P) = 0$).

Logo, não existem valores de x.

OBSERVAÇÃO:

Como os polinômios característicos das matrizes A e B são diferentes as matrizes não são semelhantes, isto é não existe P inversível tal que $A = P^{-1}.B.P$.

RESPOSTA:

não existe valor de x.

QUESTÃO | ENUNCIADO: | Folha 4

IT .. único (1,0 ponto)

Seja a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ cujas raízes são: "a", "b", "c".

Determine "s", "t" e "u", em função de "p", "q" e "r", para que a equação $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$ tenha raízes "bc", "ca" e "ab".

SOLUÇÃO

Da primeira equação, temos:

(1) $S_1 = a + b + c = -p$

(2) $S_2 = ab + bc + ac = q$

(3) $S_3 = abc = -r$

Da segunda equação, temos:

(4) $S'_1 = ab + ac + bc = -s$

(5) $S'_2 = ab.ac + ab.bc + ac.bc = abc(a + b + c) = t$

(6) $S'_3 = ab.ac.bc = (abc)^2 = -u$

Logo:

(4) e (2) $\Longrightarrow$ $s = -q$

(5), (1) e (3) $\Longrightarrow$ $t = rp$

(6) e (3) $\Longrightarrow$ $u = -r^2$

RESPOSTA:

$s = -q$; $t = rp$. $u = -r^2$

IME-CEE/1978/9	ÁLGEBRA	[signature]	Folha 6

4ª QUESTÃO

ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Considere a família de curvas:

$y(m) = mx^2 - (1+8m)x + 4(4m+1)$.

Determine:

a) as coordenadas do ponto P, comum a todas essas curvas;

b) a curva da família, tal que a tangente no ponto de abcissa $x = 1$ tenha coeficiente angular igual a 1.

SOLUÇÃO

(a) $y = mx^2 - x - 8m\,x + 16m + 4$

$\Longrightarrow$ $y = m(x^2 - 8x + 16) - (x - 4) \Longrightarrow y = m(x-4)^2 - (x-4)$

$\Longrightarrow$ $y = (x-4).(m(x-4)-1)$

logo, para todo valor de m, temos que o ponto P(4,0) irá pertencer à curva.

(b) $y = mx^2 - (1 + 8m)x + 4(4m + 1)$

$\Longrightarrow$ $y' = 2mx - (1 + 8m)$

mas $x = 1 \Longrightarrow y' = 1$, logo:

$1 = 2m - 1 - 8m \Longrightarrow \boxed{m = -\frac{1}{3}}$

e daí,

$y = -\frac{1}{3}(x^2 + 5x + 4)$

RESPOSTA:

(a) P(4,0)

(b) $y = -\frac{1}{3}(x^2 + 5 + 4)$

IME-CEE/1978/9	ÁLGEBRA		Folha 7

5ª QUESTÃO

ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

SOLUÇÃO

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

RESPOSTA:

e^{-2}

IME-CEE/1978/9 | ÁLGEBRA | Folha 8

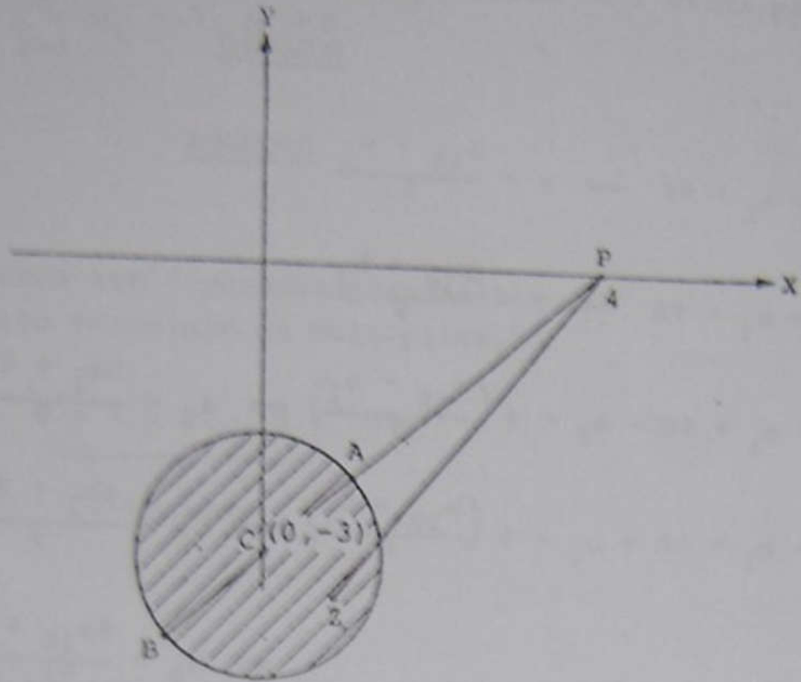
QUESTÃO

ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

Determine os valores máximo e mínimo de $|z - 4|$, sabendo-se que $|z + 3i| \leq 1$, onde $z \in \mathbb{C}$.

<u>SOLUÇÃO</u>



Seja z um ponto da região hachurada; $z = x + yi$

então $|z - 4|$ é a distância de z até $P(4,0)$.

A distância será mínima ou máxima nos pontos A e B, interseções da reta PC com a circunferência.

Como $|\vec{CB}| = 1$ e $|\vec{PC}| = 5$ temos:

$$|z - 4|_{máx} = 5 + 1 = 6$$

$$|z - 4|_{mín} = 5 - 1 = 4$$

RESPOSTA:

máximo: 6

mínimo: 4

IME-CEE/1978/9	ÁLGEBRA		
7ª QUESTÃO			Folha 10
ITEM único (1,0 ponto)	ENUNCIADO:		

Seja uma progressão aritmética de 1º termo $a_1 \neq 0$ e último termo a_{10} tal que $a_1 \neq a_{10} \neq 0$. Seja a progressão aritmética de 1º termo $b_1 = \frac{1}{a_1}$ e último termo $b_{10} = \frac{1}{a_{10}}$. Calcule $\frac{a_5}{b_6}$ em função de a_1 e a_{10}.

SOLUÇÃO

$$a_{10} = a_1 + 9r \implies r = \frac{a_{10} - a_1}{9}$$

$$b_{10} = b_1 + 9R \implies R = \frac{b_{10} - b_1}{9}$$

$$a_5 = a_1 + 4r = a_1 + 4\left(\frac{a_{10} - a_1}{9}\right) \implies a_5 = \frac{5a_1 + 4a_{10}}{9}$$

$$b_6 = b_1 + 5R = b_1 + 5\left(\frac{b_{10} - b_1}{9}\right) \implies b_6 = \frac{4b_1 + 5b_{10}}{9} = \frac{\frac{4}{a_1} + \frac{5}{a_{10}}}{9}$$

$$\implies b_6 = \frac{4a_{10} + 5a_1}{9a_1\, a_{10}}$$

Logo:

$$\frac{a_5}{b_6} = \frac{5a_1 + 4a_{10}}{9} \cdot \frac{9a_1\, a_{10}}{4a_{10} + 5a_1} \implies \frac{a_5}{b_6} = a_1\, a_{10}$$

RESPOSTA:

$$\frac{a_5}{b_6} = a_1 \cdot a_{10}$$

IME-CEE/1978/9	ÁLGEBRA		Folha 11

QUESTÃO
ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:
Um elevador com 7 pessoas parte do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. Determinar de quantas maneiras diferentes, todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada, inclusive.

OBS.:
Seja N_i o número de pessoas que desembarcam na i-ésima parada $(i = 1, 2, 3, 4)$: $\sum_{i=1}^{4} N_i = 7$, $N_i \geq 0$.

SOLUÇÃO

Cada pessoa tem 4 paradas para saltar.
Logo, pelo Princípio da Multiplicação:

$$\underbrace{4 \times 4 \times \ldots\ldots \times 4}_{7 \text{ pessoas}} = 4^7$$

OBSERVAÇÃO

Caso o desembarque em cada andar leve em conta a ordem de saída das pessoas teríamos:

$$x + y + z + w = 7 \rightarrow C_{10}^{3}$$

e permutando-se $\rightarrow P_7 . C_{10}^{3} = 7! . C_{10}^{3}$

RESPOSTA:
4^7

IME-CEE/1978/9	ÁLGEBRA		Folha 12

9ª QUESTÃO

ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:

É dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + k}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}, & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -1, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

a) Se $k = -1$, determine os pontos de descontinuidade de f.

b) Se $k = 0$:

i) determine as raízes de $f'(x) = 0$;

ii) determine as raízes de $f''(x) = 0$;

iii) faça o esboço do gráfico da função em coordenadas ortonormais.

SOLUÇÃO

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}; & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 0; & \text{se } x = 1 \\ -1; & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

para $x \neq \pm 1$, tem-se que a função é contínua pois é a razão de duas funções contínuas, com o denominador não nulo.

$$f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}} \Longrightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+1)}}\ ;\ x \neq \pm 1$$

mas $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)}} = 0 = f(1) \Longrightarrow f$ é contínua para $x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)}}$; que não existe $\Longrightarrow f$ é descontínua para $x = -1$

IME-CEE/1978/9	ÁLGEBRA		Folha 13

(Continuação da solução da 9ª Questão)

b) $f(x) = x.(x^2 - 1)^{-1/3}$ $\quad x \neq \pm 1$

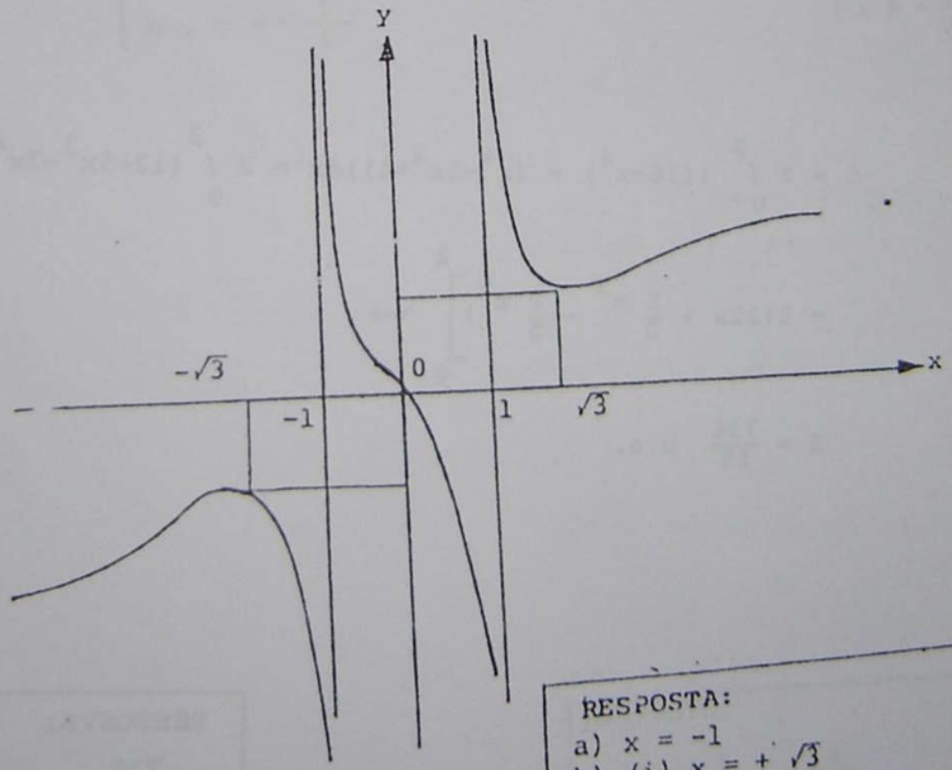
i) $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 3)}{3(x^2 - 1)^{4/3}} \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

ii) $f''(x) = \dfrac{2x(9 - x^2)}{9(x^2 - 1)^{7/3}} \Longrightarrow f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$

iii) A função é ímpar; com raiz x = 0.
Os sinais de f; f' e f" são dados pelos diagramas abaixo

f	(−)	−1	(+)	0	(−)	1	(+)				
f'	(+)	$-\sqrt{3}$	(−)	$\sqrt{3}$	(+)						
f"	(+)	−3	(−)	−1	(+)	0	(−)	1	(+)	3	(−)

Assíntotas verticais: $x = \pm 1$
Assíntotas não-verticais: não possui



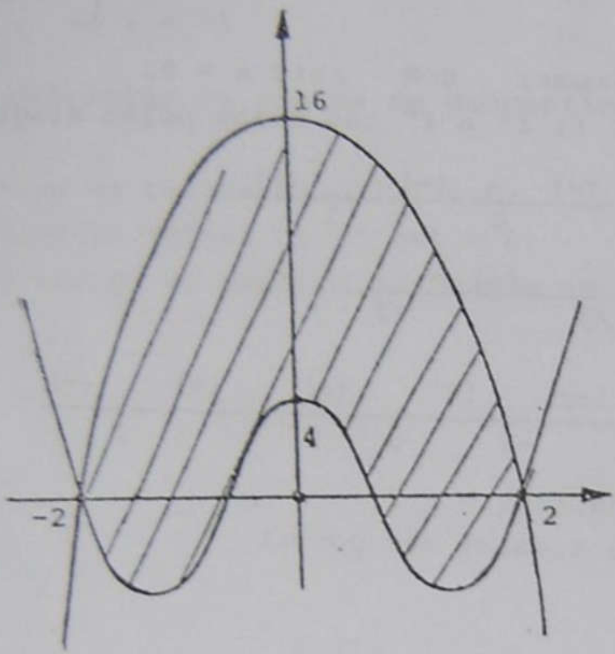
RESPOSTA:
a) $x = -1$
b) (i) $x = \pm\sqrt{3}$
(ii) $x = 0$; $x = \pm 3$

IME-CEE/1978/9	ÁLGEBRA		Folha 14

10ª QUESTÃO
ITEM único (1,0 ponto)

ENUNCIADO:
Calcule a área da superfície finita entre as curvas de equações: $y = 16 - x^4$ e $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

SOLUÇÃO



$$S = 2\int_0^2 ((16-x^4) - (x^4-5x^2+4))dx = 2\int_0^2 (12+5x^2-2x^4)dx =$$

$$= 2\left(12x + \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5\right)\Bigg]_0^2 \Longrightarrow$$

$$S = \frac{736}{15} \text{ u.a.}$$

RESPOSTA:
$\frac{736}{15}$ u.a