1a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Dada a função f: IR → IR definida como

$$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$f(x) = 1, \quad x = 0$$

determine os valores de m para os quais o gráfico de f admite tangente paralela à reta y= mx.

Notação: IR é o conjunto dos números reais.

SOLUÇÃO

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^2} \Longrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

Fazendo-se $z = \frac{1}{x^2}$, $z \in \mathbb{R}_+^*$

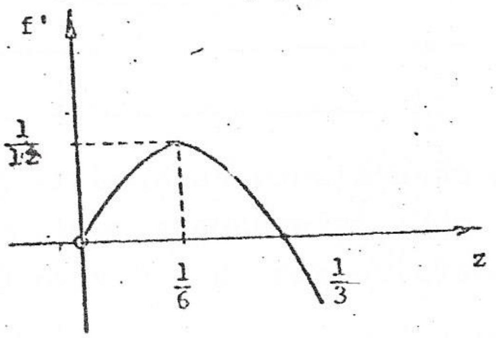
$$f'(z) = -3z^2 + z$$

NÃO É z_1 E SIM $\pm\frac{\sqrt{z}}{z}$

- raízes: $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

- valor máximo: $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{12}$; para $z = \frac{1}{6}$

- gráfico:



Logo $Im(f') = (-\infty, \frac{1}{12}]$

$$\Longrightarrow \boxed{m \leq \frac{1}{12}}$$

2a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Determine os valores de h, de modo que a desigualdade

$$-3 < \frac{x^2 - hx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

seja válida para qualquer x real.

SOLUÇÃO

Como, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0$, temos:

$$-3x^2 - 3x - 3 < x^2 - hx + 1 < 3x^2 + 3x + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + (3 - h)x + 4 > 0 \\ 2x^2 + (3 + h)x + 2 > 0 \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

i) $4x^2 + (3 - h)x + 4 > 0$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (3 - h)^2 - 4 \times 4 \times 4 < 0$$
$$\Rightarrow h^2 - 6h - 55 < 0$$
$$\Rightarrow -5 < h < 11$$

ii) $2x^2 + (3 + h)x + 2 > 0$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (3 + h)^2 - 4 \times 2 \times 2 < 0$$
$$\Rightarrow h^2 + 6h - 7 < 0$$
$$\Rightarrow -7 < h < 1$$

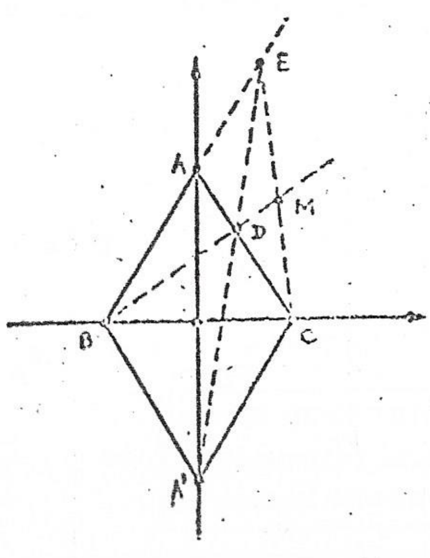
de (i) e (ii) temos que:

$$\boxed{-5 < h < 1}$$

3a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Dados dois triângulos equiláteros ABC e A'BC traça-se por A' uma reta qualquer que encontra os lados AC e AB, ou os seus prolongamentos, nos pontos D e E, respectivamente.

Determine o lugar geométrico dos pontos de encontro das retas BD e CE.



SOLUÇÃO

Sejam: $A(0, a\sqrt{3})$; $B(-a, 0)$; $C(a, 0)$ e $A'(0, -a\sqrt{3})$ os vértices dos triângulos.

Equações:

$$AB: \ y = \sqrt{3}x + a\sqrt{3}$$

$$AC: \ y = -\sqrt{3}x + a\sqrt{3}$$

$$A'E = r: \ y = mx - a\sqrt{3}$$

Interseções:

$$r \cap AC: \ x_D = \frac{2a\sqrt{3}}{m+\sqrt{3}} \ ; \quad y_D = \frac{am\sqrt{3} - 3a}{m+\sqrt{3}}$$

$$r \cap AB: \ x_E = \frac{2a\sqrt{3}}{m-\sqrt{3}} \ ; \quad y_E = \frac{am\sqrt{3} + 3a}{m-\sqrt{3}}$$

Equações:

$$BD: \ y = \frac{m\sqrt{3} - 3}{3\sqrt{3} + 3}(x + a) \ \ldots\ldots \ (1)$$

$$CE: \ y = \frac{m\sqrt{3} + 3}{3\sqrt{3} - m}(x - a) \ \ldots\ldots \ (2)$$

$$\text{de } (1) \implies m = \frac{3x + 3\sqrt{3}y + 3a}{\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}$$

$$\text{de } (2) \implies m = \frac{-3x + 3\sqrt{3}y + 3a}{\sqrt{3}x + y - a\sqrt{3}}$$

Igualando-se as equações acima, temos:

$$\frac{\cancel{3}x + \cancel{3}\sqrt{3}y + \cancel{3}a}{\sqrt{3}x - y + a\sqrt{3}} = \frac{-\cancel{3}x + \cancel{3}\sqrt{3}y + \cancel{3}a}{\sqrt{3}x + y - a\sqrt{3}}$$

$$\implies \frac{x + \sqrt{3}y + a}{-x + \sqrt{3}y + a} = \frac{\sqrt{3}x - y + a\sqrt{3}}{\sqrt{3}x + y - a\sqrt{3}}$$

aplicando-se razões e proporções, temos:

$$\frac{x}{\sqrt{3}y + a} = \frac{-y + a\sqrt{3}}{\sqrt{3}x}$$

$$\implies \sqrt{3}x^2 = -\sqrt{3}y^2 + 2ay + a^2\sqrt{3}$$

$$\implies x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a = a^2$$

$$\implies x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$\implies$ LUGAR GEOMÉTRICO: Circunferência circunscrita ao triângulo ABC excluindo-se os vértices B e C

4a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Mostre que não existem matrizes quadradas A e B, que verifiquem $AB - BA = I$ onde I é a matriz identidade de uma ordem n qualquer.

SOLUÇÃO

Suponhamos que existam matrizes A e B tais que

$$AB - BA = I$$

Usando-se o conceito de traço de uma matriz (soma dos elementos da sua diagonal principal), temos que:

traço (AB) = traço (BA)

$\Longrightarrow$ traço (AB - BA) = traço (AB) - traço (BA) = 0

e como traço (I) = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n

$\Longrightarrow$ traço (AB - BA) $\neq$ traço (I)

$\Longrightarrow$ ABSURDO

5a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Mostre que o número

$$\underbrace{4444.......4}_{n \text{ vezes}}\underbrace{8888.......8}_{(n-1) \text{ vezes}}9$$

é um quadrado perfeito.

SOLUÇÃO

$$N = \underbrace{4444 \ldots\ldots 4}_{n}\underbrace{8888 \ldots\ldots 8}_{n-1}9 = \underbrace{4444 \ldots\ldots 4}_{n}\underbrace{8888 \ldots\ldots 8}_{n} + 1 =$$

$$4.[\underbrace{1111 \ldots\ldots 1}_{n}] \times 10^n + 8.[\underbrace{1111 \ldots\ldots 1}_{n}] + 1 =$$

$$= 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \times 10^n + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{4}{9} \cdot 10^n + \frac{8}{9} \cdot 10^n - \frac{8}{9} + 1 =$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 10^{2n} + \frac{4}{9} \cdot 10^n + \frac{1}{9} = \left[\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right]^2$$

Como $2.10^n + 1$ é múltiplo de 3 (soma dos algarismos igual a 3), $\frac{2 . 10^n + 1}{3}$ é inteiro e $\underline{N}$ é quadrado perfeito.

VALOR: 1,0

6a. QUESTÃO:

O professor Sah Bido quer oferecer jantares para 3 alunos de cada vez.

O professor tem 7 alunos e quer oferecer 7 jantares, com a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, isto é, se os alunos A, B e C comparecerem a algum jantar, então a presença do aluno A, por exemplo, em outro jantar, impedirá a presença de C ou de B, neste jantar.

Chamando-se de programa a um conjunto de 7 jantares nas condições especificadas, pergunta-se: quantos programas diferentes poderão ser formados?

SOLUÇÃO

1) Fixando 3 alunos em um jantar (por exemplo: A,B,C); existem apenas 6 maneiras de formar um programa de 7 jantares pois:

$$\underbrace{ABC}_{1º j}\quad \underbrace{ADE}_{2º j}\quad \underbrace{AFG}_{3º j}\quad \underbrace{BD\{^{G}_{F}}_{4º j}\quad \underbrace{BE\{^{F}_{G}}_{5º j}\quad \underbrace{CD\{^{F}_{G}}_{6º j}\quad \underbrace{CE\{^{G}_{F}}_{7º j}$$

i) os alunos A,B,C têm que aparecer, separadamente, em mais de 2 jantares;

ii) o aluno D aparecerá em 3 jantares diferentes, junto, respectivamente, aos alunos A,B,C;

iii) o 3º aluno do 2º jantar poderá ser escolhido de 3 maneiras (E, F ou G; por exemplo: E);

iv) o aluno E jantará com B e C, desde que D não esteja jantando;

v) para o 3º jantar terão que ser convidados os 2 alunos que ainda não jantaram com A (no exemplo: F, G);

vi) temos agora 2 hipóteses para completar os 4 últimos jantares (respectivamente: F, G, G, F ou G, F, F, G).

Logo:

total de hipóteses fixados os alunos do 1º jantar:

3 x 2 = 6

2) Podemos escolher os componentes do 1º jantar das seguintes maneiras:

$$AB\left\{\begin{array}{l} C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array}\right. \Longrightarrow 5 \text{ hipóteses}$$

OBSERVAÇÃO:

Se mudarmos a 2ª letra, também, estaremos repetindo jantares, pois, por exemplo, ACG já aparece nas considerações anteriores.

Total: 6 x 5 = 30 programas

7a. QUESTÃO: ÍTEM a VALOR: 0,7

A população de um país, no ano t, t $\geq$ 1860, é dada, aproximadamente por:

$$N(t') = \frac{L}{1 + e^{\frac{\lambda - t'}{\alpha}}} \quad \text{onde } t' = t - 1860,$$

L, λ, α são constantes reais e

$10^6 \times N(t')$ é o número de habitantes.

a) Calcule a população do país no ano 2000, sabendo-se que em 1860, ele tinha 15 milhões de habitantes, em 1895, 18 milhões de habitantes e em 1930, 20 milhões de habitantes.

Notação: e é a base do sistema de logarítmos neperianos.

SOLUÇÃO

i) $t = 1860 \Longrightarrow t' = 0 \Longrightarrow \dfrac{L}{1 + e^{\lambda/\alpha}} = 15$

$t = 1895 \Longrightarrow t' = 35 \Longrightarrow \dfrac{L}{1 + e^{\lambda/\alpha} \cdot e^{-35/\alpha}} = 18$

$t = 1930 \Longrightarrow t' = 70 \Longrightarrow \dfrac{L}{1 + e^{\lambda/\alpha} \cdot e^{-70/\alpha}} = 20$

ii) Sejam: $a = e^{\lambda/\alpha}$

$b = e^{-35/\alpha}$

Temos: $\dfrac{L}{1 + a} = 15 \Longrightarrow a = \dfrac{L - 15}{15}$ .... (1)

$\dfrac{L}{1 + ab} = 18 \Longrightarrow ab = \dfrac{L - 18}{18}$ .... (2)

$\dfrac{L}{1 + ab^2} = 20 \Longrightarrow ab^2 = \dfrac{L - 20}{20}$ .... (3)

iii) De (1), (2) e (3) vem:

$$\left(\frac{L - 18}{18}\right)^2 = \frac{L - 15}{15} \times \frac{L - 20}{20} \Longrightarrow 2L^2 - 45L = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} L = 0 \text{ (não serve)} \\ L = \dfrac{45}{2} \end{cases}$$

De (1) temos: $a = \frac{1}{2}$

De (2) temos: $b = \frac{1}{2}$

iv) $t = 2000 \Longrightarrow t' = 140$

$$\Longrightarrow N(140) = \frac{L}{1 + e^{\lambda/\alpha} \cdot e^{-140/\alpha}} = \frac{L}{1 + a \cdot b^4}$$

$$\Longrightarrow N(140) = \frac{240}{11}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{POPULAÇÃO 2000 : 21,8 milhões de habitantes}}$

7a. QUESTÃO: ÍTEM b VALOR: 0,3

b) Ao longo do tempo, a população tenderá a um número finito de habitantes? Justifique sua resposta.

SOLUÇÃO

$$\lim_{t' \to \infty} N(t') = \lim_{t' \to \infty} \frac{L}{1 + e^{\lambda/\alpha} \cdot e^{-t'/\alpha}}$$

como $\alpha > 0$, $e^{-t'/\alpha} \to 0$

$$\Longrightarrow \lim_{t' \to \infty} N(t') = L$$

Logo a população tenderá a 22,5 milhões de habitantes.

8a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos e seja $h \in \mathbb{C}$. Diz-se que um ponto h é um ponto de Hurwitz se $|h| = 1$ e, para todo número natural n, $h^{n+1} \neq 1$.

Prove que o ponto $z = \dfrac{2 - i}{2 + i}$ é um ponto de Hurwitz.

Notação: $i^2 = -1$.

SOLUÇÃO

i) $z = \dfrac{2-i}{2+i} \times \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{(2-i)^2}{4+1} \Longrightarrow z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$

$\Longrightarrow |z| = 1$

ii) Seja $z = \text{cis } 2\theta$, onde $\theta = \text{arc tg}(-\frac{1}{2})$

$$z^{n+1} = \text{cis}(2(n+1)\theta)$$

Mas:

$$\text{tg}(n+1)\theta = \frac{\text{tg } n\theta + \text{tg } \theta}{1 - \text{tg } n\theta . \text{tg } \theta} \quad \text{e} \quad \text{como tg } \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \text{tg}(n+1)\theta = \frac{2 \text{ tg } n\theta - 1}{\text{tg } n\theta + 2}$$

Seja $\text{tg } n\theta = \frac{P_n}{Q_n} \Longrightarrow \text{tg}(n+1)\theta = \frac{2P_n - Q_n}{P_n + 2Q_n} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} P_{n+1} = 2P_n - Q_n \quad \ldots (1) \\ Q_{n+1} = P_n + 2Q_n \quad \ldots (2) \end{cases}$$

$2 \times (1) + (2) \Longrightarrow 5P_n = 2P_{n+1} + Q_{n+1} \quad \ldots (3)$

$(1) \Longrightarrow P_{n+2} = 2P_{n+1} - Q_{n+1} \Longrightarrow Q_{n+1} = 2P_{n+1} - P_{n+2} \quad \ldots (4)$

de (3) e (4) temos:

$$\boxed{P_{n+2} = 4P_{n+1} - 5P_n}$$

Mas:

$\text{tg } \theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow P_1 = -1$

$\text{tg } 2\theta = -\frac{4}{3} \Longrightarrow P_2 = -4$

Logo, aplicando-se CONGRUÊNCIA MÓDULO 10, temos:

$P_1 = -1 \equiv -1$

$P_2 = -4 \equiv -4$

1) $\left. \begin{array}{l} P_{n+1} \equiv -4 \\ P_n \equiv -1 \end{array} \right| \Longrightarrow P_{n+2} \equiv -16 + 5 = -11 \equiv -1$

2) $\left. \begin{array}{l} P_{n+1} \equiv -1 \\ P_n \equiv -4 \end{array} \right| \Longrightarrow P_{n+2} \equiv -4 + 20 = 16 \equiv -4$

Logo $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} \not\equiv 0$ (mód. 10) $\Longrightarrow \text{tg}((n+1)\theta) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \text{sen}(2(n+1)\theta) \neq 0 \Longrightarrow h^{n+1} \neq 1$

De (i) e (ii) segue-se que $\frac{2 - i}{2 + i}$ é um ponto de Hurwitz.

9a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Prove a seguinte identidade:

$$\binom{n+1}{2m+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m}\binom{k}{m},$$

onde n e m são inteiros positivos e

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\ m!} \quad \text{para} \quad n \geqslant m$$

e $\binom{n}{m} = 0$ para $n < m$.

SOLUÇÃO

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m}\binom{k}{m} =$$

(Neste caso, $k \geqslant m$ para que $\binom{k}{m}$ não se anule)
$n-k \geqslant m \Rightarrow n \geqslant m+k \Rightarrow n \geqslant 2m$

$$= C^m_{n-m} \cdot C^m_m + C^m_{n-m-1} \cdot C^m_{m+1} + C^m_{n-m-2} \cdot C^m_{m+2} + \ldots + C^m_m \cdot C^m_{n-m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2m} \left[C^m_{(n-2m)+m-k} \cdot C^m_{m+k} \right] = C^{2m+1}_{n+1},$$

de acordo com o resultado conhecido (LEMA):

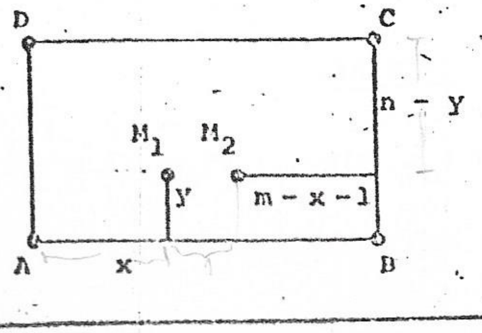
$$\sum_{k=0}^{s} C^b_{s+b-k} \cdot C^a_{a+k} = C^{a+b+1}_{a+b+s+1}$$

fazendo-se: $s = n - 2m$
$b = m$
$a = m$

então: $a + b + s + 1 = n + 1$
$a + b + 1 = 2m + 1$

LEMA: Demonstração:

Considere o retângulo ABCD de lados $\underline{m}$ e $\underline{n}$ abaixo:



Seja L_x^y o número de caminhos ligando $\underline{A}$ a $\underline{C}$ e passando por $M_1(x,\ y)$ e $M_2(x + 1,\ y)$.

$$L_x^y = C_{x+y}^{y} \cdot C_{m+n-x-y-1}^{n-y}$$

$$= C_{x+y+m+n-x-y-1+1}^{x+m-x-1+1}$$

$$\sum_{y=0}^{n} L_x^y = \sum_{y=0}^{n} C_{x+y}^{y} \cdot C_{m+n-x-y-1}^{n-y} = \sum_{y=0}^{n} C_{x+y}^{x} \cdot C_{m+n-x-y-1}^{m-x-1} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\sum_{y=0}^{n} L_x^y = \text{total de caminhos de } \underline{A} \text{ até } C = C_{m+n}^{m} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Sejam:
$x = a$
$y = k$
$n = s$
$m - x - 1 = b$

Temos de (1) e (2), que:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{s} C_{a+k}^{a} \cdot C_{s+b-k}^{b} = C_{a+b+s+1}^{a+b+1}}$$

10a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz quadrada real n x n de termos positivos. Define-se o "permanente de M" como

$$\text{perm } M = \sum_{S} m_{1t(1)}\ m_{2t(2)} \cdots\cdots m_{nt(n)}$$

onde S é o conjunto das permutações $(t(1),\ t(2), \ldots, t(n))$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ tem, por exemplo, como permanente

$1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 4 \times 9 + 1 \times 6 \times 8$.

Seja a matriz n x n, $H = (h_{ij})$ onde $h_{ij} = i(j+1)$.

Calcule o permanente de H.

SOLUÇÃO

$$T_p = (1 \cdot a_1) \times (2 \cdot a_2) \times \ldots \times (n \cdot a_n) = n! \times (a_1 \cdot a_2 \ldots a_n)$$

onde $(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ é uma das n! permutações de $\{2, 3, \ldots, n, n+1\}$.

Logo: $a_1 \cdot a_2 \ldots a_n = (n+1)!$

Assim: $T_p = n!(n+1)!$, $\forall p \in S$

Finalmente, temos:

$$\sum_{p \in S} T_p = (n!)^2 \cdot (n+1)! \text{ ; pois existem } n! \text{ termos.}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\text{perm } H = (n!)^2 \cdot (n+1)!}$$