1a. QUESTÃO: ÍTEM a VALOR: 1,1

Seja a função:

$$y = mx^2 - (1 + 8m)\,x + 4\,(4m + 1),$$

onde m é um número dado, mas variável.

Mostre que todas as curvas representativas da função passam por um ponto A fixo e que são todas tangentes entre si, neste ponto.

Calcule as coordenadas do ponto A e dê a equação da tangente comum.

SOLUÇÃO

i) Da equação:

$$m(x^2 - 8x + 16) + (4 - x - y) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16 = 0 \\ 4 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow P(4,\ 0).$$

Logo o ponto P(4, 0) pertence a todas as parábolas da família.

ii) Derivando:

$$\frac{dy}{dx} = 2mx - (1 + 8m)$$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = 4} = -1$, que independe de m, logo todas as parábolas têm a mesma inclinação no ponto P(4, 0), sendo, portanto, tangentes entre si.

iii) Equação da tangente comum: $y = -x + 4$.

1a. QUESTÃO: ÍTEM b VALOR: 0,4

Determine os dois valores de m para os quais a razão entre as raízes da equação:

$$mx^2 - (1 + 8m)\,x + 4\,(4m + 1) = 0$$

é igual a $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

SOLUÇÃO

Da equação:

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{4} \rightarrow x_2 = -4x_1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1 + 8m}{m} \Rightarrow -3x_1 = \frac{1 + 8m}{m} \quad \ldots (1)$$

$$x_1 x_2 = \frac{4(4m + 1)}{m} \Rightarrow -4x_1^2 = \frac{4(4m + 1)}{m} \quad \ldots (2)$$

De (1) e (2):

$$\left(\frac{1 + 8m}{-3m}\right)^2 = -\frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}(4m + 1)}{m}$$

$$\cancel{m}(1 + 16m + 64\, m^2) = -9m^{\cancel{2}}\, (4m + 1)$$

$$100\, m^2 + 25\, m + 1 = 0 \iff \left| \begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{5} \\ \text{ou} \\ m = -\dfrac{1}{20} \end{array} \right.$$

2a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja M_n (R) o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, de coeficientes reais. Define-se a função,

$\Psi : M_n (R) \times M_n (R) \to M_n (R)$ por

$\Psi (A, B) = AB - BA.$

Calcule:

$\Psi (\Psi (A, B), C) + \Psi (\Psi (B, C), A) + \Psi (\Psi (C, A), B).$

SOLUÇÃO

Fazendo as parcelas, respectivamente, x, y e z:

$x = \psi (AB - BA, C) = (AB - BA)C - C(AB - BA) = ABC - BAC - CAB + CBA$ (1)

$y = \psi (BC - CB, A) = BCA - CBA - ABC + ACB$ (2)

$z = \psi (CA - AC, B) = CAB - ACB - BCA + BAC$ (3)

De (1), (2), (3):

$x + y + z = \overline{0}$, onde $\overline{0}$ é a matriz nula n x n.

3a. QUESTÃO: VALOR: 1,5

Dado o número $m = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$, determine quantos números inteiros positivos não maiores que m são primos relativos com m.

SOLUÇÃO

$M = 16 \times 27 \times 25 \Rightarrow 10.800$ números

i) números pares: 5.400 números (A)

ii) múltiplos de 3: 3.600 números (B)

iii) múltiplos de 5: 2.160 números (C)

Não servem: $n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$n(A \cap B) = 1.800$ números
$n(A \cap C) = 1.080$ números
$n(B \cap C) = 720$ números
$n(A \cap B \cap C) = 360$ números

$\Rightarrow$ não servem: 7.920

$\therefore N = 10.800 - 7.920 = 2.880$ números

Observação:

Se a Função de Euler for considerada conhecida, a solução é trivial:

$$\phi(n) = (1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots n$$

onde $p_1; p_2; \ldots$ são os fatores primos distintos de n e $\phi(n)$ dá o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que não são primos relativos com n.

Assim, a resposta é:

$$\phi(2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5})\ 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2.880 \text{ números}$$

4a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Calcule o coeficiente do termo em x^3, no desenvolvimento de:

$$(2x - 3)^4 \ (x + 2)^5.$$

SOLUÇÃO

$$(2x - 3)^4 = \sum_{i=0}^{4} C_4^i \ (2x)^{4-i} \ (-3)^i = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$$

$$(x + 2)^5 = \sum_{j=0}^{5} C_5^j \ (x)^{5-j} \ (2)^j = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

Coeficiente de x^3:

$-96 \cdot 32 + 216 \cdot 80 - 216 \cdot 80 + 81 \cdot 40 = 168.$

5a. QUESTÃO: VALOR: 1,5

Seja a função f definida, no conjunto dos reais, por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ para } x \leq -2 \\ \cos\frac{\pi x}{2}, \text{ para } -2 < x \leq 0 \\ e^{-2x}, \text{ para } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, \text{ para } x > 1. \end{cases}$$

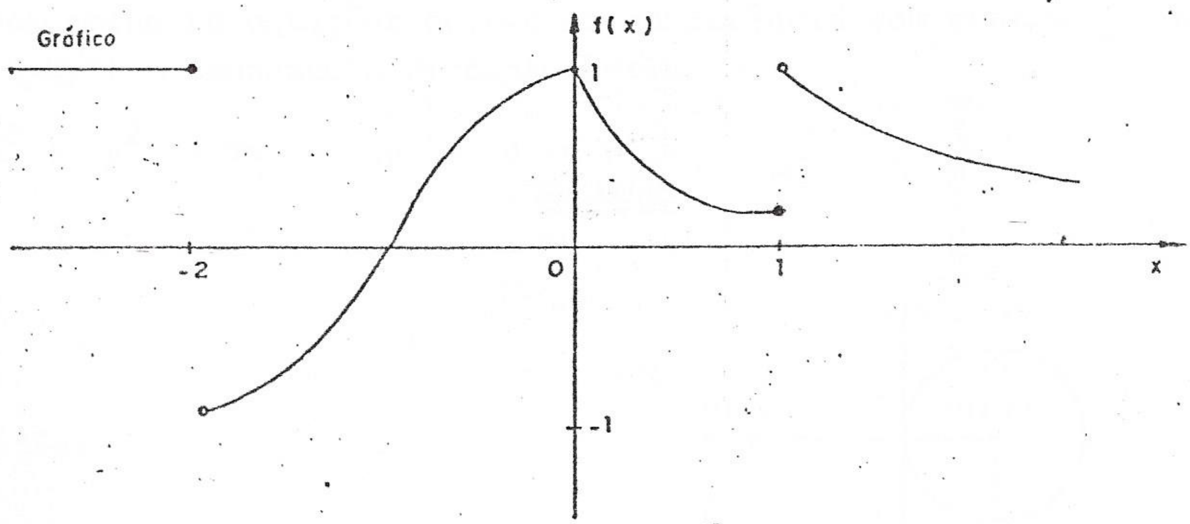
(valor 0,3) a) Determine o domínio e a imagem de f;

(valor 0,4) b) Determine os pontos de descontinuidade e os pontos onde f não é derivável;

(valor 0,4) c) Determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente;

(valor 0,4) d) Determine os pontos e os valores de máximo e mínimo de f. Calcule o supremo e o ínfimo da imagem de f.

SOLUÇÃO



a) Dom f = $\mathbb{R}$

Im f = (-1, +1].

b) Descontínua em x = -2 e x = 1 : em ambos os pontos não tem limite, pois os limites laterais, que existem, não são iguais. Não derivavel nos pontos em que não é contínua ($x = -2$ e $x = 1$) e no ponto $x = 0$, onde as derivadas laterais, que existem, não são iguais.

c) Estritamente crescente no intervalo $(-2, 0]$, onde a função primeira derivada é positiva em $(-2, 0)$ e a função é contínua em $(-2, 0)$. Estritamente decrescente em $[0, 1]$ e em $(1, \infty)$, pois, nestes intervalos a função primeira derivada é negativa.
Em $(-n, -2)$ a função é não decrescente e não crescente, porque constante.

d) Os "pontos de máximo" pertencem a $(-\infty, -2] \cup \{0\}$.
Os "pontos de mínimo" pertencem a $(-\infty, -2) \cup \{1\}$.

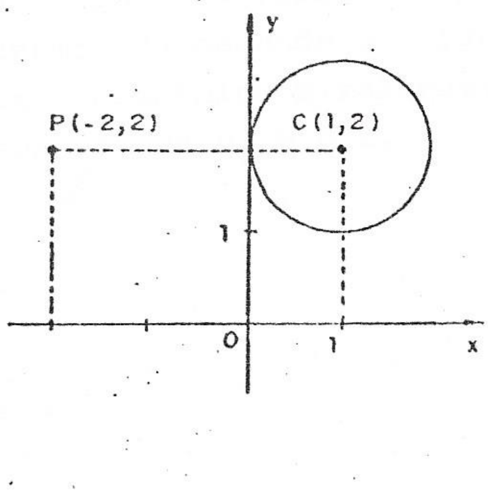
Valor máximo absoluto: 1
Valor mínimo relativo: e^{-2}
$\operatorname{Sup}[f(x)] = 1$
$\operatorname{Inf}[(x)] = -1$.

6a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Determine as equações de uma circunferência com centro no ponto $(-2,2)$ e tangente à circunferência:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

SOLUÇÃO



Da equação:

$$C : \begin{cases} C(1, 2) \\ r = 1 \end{cases}$$

Da figura:

$$C_1 : \begin{cases} P(-2, 2) \\ r_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$C_2 : \begin{cases} P(-2,\ 2) \\ r_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

7a. QUESTÃO: ÍTEM a VALOR: 0,7

O quadrado de qualquer número par $2n$ pode ser expresso como a soma de n termos, em progressão aritmética.

Determine o primeiro termo e a razão desta progressão.

SOLUÇÃO

PA: $a_1,\ a_1 + r,\ \ldots,\ a_1 + (n-1)\,r,\ \ldots$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cancel{n}}{2} = 4n^{\cancel{2}} \Rightarrow a_1 + a_n = 8n$$

$$\Rightarrow a_n = 8n - a_1. \qquad (1)$$

De (1), vem:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 8 - a_1 \Rightarrow a_1 = 4;$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 16 - a_1 = 16 - 4 \Rightarrow a_2 = 12;$

$r = a_2 - a_1 = 8.$

Logo $a_1 = 4$ e

$r = 8.$

7a. QUESTÃO: ÍTEM b VALOR: 0,8

Três progressões geométricas têm mesma razão q e primeiros termos diferentes a, b, c. A soma dos n primeiros termos da primeira é igual a soma dos $2n$ primeiros termos da segunda e igual a soma dos $3n$ primeiros termos da terceira. Determine a relação que liga as razões $\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, em função somente de a, b e c.

SOLUÇÃO

$$\begin{cases} P_1 : a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots \\ P_2 : b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots \\ P_3 : c,\ cq,\ cq^q,\ \ldots \end{cases}$$

$$a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = b \cdot \frac{q^{2n} - 1}{q - 1} = c \cdot \frac{q^{3n} - 1}{q - 1}$$

$$a(q^n - 1) = b(q^{2n} - 1) = c(q^{3n} - 1) \qquad (1)$$

De (1)

$$a = b(q^n + 1) \qquad (2)$$

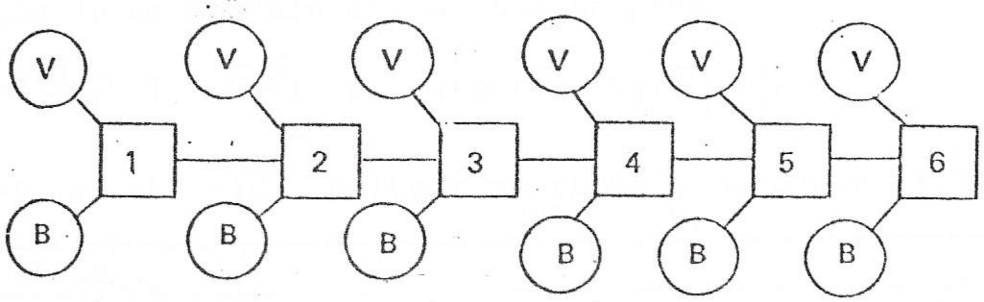
$$a = c(q^{2n} + q^n + 1) = c\ [(q^n + 1)^2 - (q^n + 1) + 1] \qquad (3)$$

(2) em (3)

$$\frac{a}{c} = [\ (\frac{a}{b})^2 - \frac{a}{b} + 1\ ] \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{1}{(b/a)^2} - \frac{1}{(b/a)} + 1}$$

8a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acessa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que pode ser obtidas.



SOLUÇÃO

Total de possibilidade: $3^6 = 729$.

Possibilidades que "não servem":

0 lâmpadas:		1
1 lâmpada :	$C_6^1 \times 2$ =	12
2 lâmpadas:	$C_6^2 \times 2 \times 2$ =	60 → 15+15+6·5
Total:		73

Finalmente: 729 – 73 = 656 configurações.