IME – ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA – 1984/1985

JS 6/12/84 (p. 16), 7/12/84 (p. 16), 8/12/84 (p. 15), 10/12/84 (p. 18)

MINISTÉRIO DO EXÉRCITO
EME - CTEx
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

IME

COMISSÃO DE EXAME DE ESCOLARIDADE
1984/85

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA DE ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA

1. NÃO ASSINE A PROVA.
2. Utilize a caneta esferográfica fornecida pelo Grupo de Aplicação e Fiscalização. As figuras julgadas necessárias deverão ser feitas a lápis preto. Não use lápis de outras cores.
3. O espaço destinado à solução de cada questão é suficiente. Portanto, não será considerada resolução fora do local especificamente designado.
4. Não será fornecido material suplementar. A prova fornecida contém 5 (cinco) folhas de papel para rascunho, o qual poderá ser feito também no verso das folhas de questões. Note-se, no entanto, que o rascunho não será levado em conta para efeito de correção.
5. A interpretação das questões faz parte da resolução. São vedadas perguntas ao Grupo de Aplicação e Fiscalização.
6. A prova está sob a forma de caderno. Não é permitido destacar suas folhas. Ao entregar a prova devolva todo o material recebido.
7. Esta prova contém, além da capa e da presente folha de instruções, 17 (dezessete) folhas numeradas de 1 (um) a 17 (dezessete).
8. O tempo para solução desta prova é de 4 (quatro) horas.
9. Leia os enunciados com atenção. Resolva as questões na ordem que mais lhe convier. Seja sucinto, evitando divagações.

1a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Sejam as funções

$$Z = \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad Y = \sqrt{1-x^4}$$

Mostre que no subconjunto dos reais onde as funções são definidas

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{Z}{x^4}$$

SOLUÇÃO

Racionalizando Z, vem: $Z = \dfrac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}$

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{-2-2\sqrt{1-x^4}}{x^3 \cdot \sqrt{1-x^4}}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$$

daí, $\dfrac{dZ}{dY} = \dfrac{dZ}{dx} \cdot \dfrac{dX}{dY}$.

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{-2-2\sqrt{1-x^4}}{x^3 \cdot \sqrt{1-x^4}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{-2x^3}$$

$$\frac{dZ}{dY} = \frac{-2-2\sqrt{1-x^4}}{-2x^6} \quad \cdot \quad \frac{dZ}{dY} = \frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^6}$$

ou seja, $\dfrac{dZ}{dY} = \dfrac{\dfrac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}}{x^4} \Rightarrow \boxed{\dfrac{dZ}{dY} = \dfrac{Z}{x^4}}$

2a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Encontre o valor de k para que a reta determinada pelos pontos $A\ (0, 3)$ e $B\ (5, -2)$ seja tangente à curva $y = \frac{k}{x+1}$ para $x \neq -1$.

SOLUÇÃO

reta $\overline{AB}$: $y = -x + 3$

$$\begin{cases} y = \dfrac{k}{x+1} \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{k}{x+1} = -x + 3 \rightarrow -x^2 + 2x + (3 - k) = 0$$

basta fazer $\Delta = 0$.

Logo, $4 - 4\,(-1)\,.\,(3 - k) = 0 \rightarrow 4 + 4\,(3 - k) = 0$

$$\boxed{k = 4}$$

1a. QUESTÃO VALOR 1,0

Determine o valor de $\underline{b}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{t=0}^{n} \log_p 5^{t+1} = 4$$

onde $p = b^{(t+1)2^t}$

SOLUÇÃO

$$\log_{b^{(t+1)2^t}} 5^{t+1} = \frac{\log 5^{t+1}}{\log b^{(t+1)\,2^t}} = \frac{(t+1)\log 5}{(t+1)\,2^t \log b} = \frac{\log 5}{2^t \log b}$$

daí, $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{t=0}^{n} \frac{\log 5}{2^t \log b} = \frac{\log 5}{\log b} \lim_{n \to \infty} \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{2^t}$

mas $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{t=0}^{n} \frac{1}{2^t} = 2.$

Logo, $2 \cdot \dfrac{\log 5}{\log b} = 4 \to \dfrac{\log 5}{\log b} = 2 \to \log_b 5 = 2 \to b^2 = 5 \to$

$\to b = \pm\sqrt{5}$

Então $\boxed{b = \sqrt{5}}$

(Se $b = -\sqrt{5}$, teríamos para $t = 0$ uma base de logarítmos negativa).

4a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Seja A uma relação definida sobre os reais, contendo os pontos pertencentes às retas $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$.

Determine os pontos que necessariamente devem pertencer à A para que A seja transitiva.

SOLUÇÃO

Se A contém as retas $y = k_1x$ e $y = k_2x$ então, pela transitividade, A deve conter a reta $y = k_1 \cdot k_2x$.

Ora, o menor conjunto, fechado em relação ao produto, que contém os números 2^1 e 2^{-1} é $\{ 2^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

Logo, A deve conter todos os pontos das retas $y = 2^nx$, $n \in \mathbb{Z}$.

5a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Sejam z_1 e z_2 complexos de raios vetores OP_1 e OP_2, respectivamente.

Mostre que OP_1 e OP_2 são perpendiculares se e somente se $z_1\bar{z}_2$ é um imaginário puro.

Notação: $\bar{z}$ é o conjugado de z

SOLUÇÃO

Seja $Z_1 = a + bi$ e $Z_2 = c + di$

$Z_1 \cdot \bar{Z}_2 = (a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (bc - ad)i$

é imaginário puro se e só se $ac + bd = 0$.

$\overrightarrow{OP}_1 = (a, b)$

$\overrightarrow{OP}_2 = (c, d)$

OP_1 é perpendicular a OP_2 se e só se $\overrightarrow{OP}_1 \cdot \overrightarrow{OP}_2 = (a, b) \cdot (c, d) =$

$= ac + b \cdot d = 0$

6a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Sabe-se que as raízes do polinômio abaixo são todas reais e distintas

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \; ; \quad \text{onde}$$

$$a_i \in \mathbb{R} \quad , \; i = 0, 1, \dots, n; \; a_n \neq 0$$

Mostre que a derivada $f'(x)$ possui também todas as suas raízes reais e distintas.

SOLUÇÃO

Sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ as raízes de $f(x)$.

Pelo teorema de Rolle existem $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ tais que:

$x_1 < c_1 < x_2$

$$\begin{array}{ccccc} x_2 & < & c_2 & < & x_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} & < & c_{n-1} & < & x_n \end{array}$$

$f'(c_1) = f'(c_2) = \dots = f'(c_{n-1})$

Como $c_1 < c_2 < \dots c_{n-1}$ e $f'(x)$ é de grau $(n - 1)$, todas as raízes de $f'(x)$ são reais e distintas.

7a. QUESTÃO: ITEM A VALOR: 0.4

Seja a sequência $\{v_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, definida a partir de seus dois primeiros termos v_0 e v_1 e pela fórmula geral

$$v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}\text{ , para } n \geq 2$$

Define-se uma nova sequência $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ pela fórmula

$$v_n = 3^n u_n$$

a) Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de u_0 e u_1

SOLUÇÃO

$$v_n = 6\,v_{n-1} - 9\,v_{n-2}$$

$$v_n = 3^n \cdot \mu_n$$

$$3^n \mu_n = 6 \cdot 3^{n-1} \mu_{n-1} - 9 \cdot 3^{n-2} \mu_{n-2}$$

$$3^n \mu_n = 2 \cdot 3^n \mu_{n-1} - 3^n \mu_{n-2}$$

$$\mu_n = 2\,\mu_{n-1} - \mu_{n-2}$$

$$\mu_n - \mu_{n-1} = \mu_{n-1} - \mu_{n-2} = \mu_1 - \mu_0. \quad \text{(Constante)}$$

Logo, $\boxed{\mu_n - \mu_{n-1} = \mu_1 - \mu_0}$

7a. QUESTÃO: ITEM B VALOR: 0,3

b) Calcule u_n e v_n em função de n, v_1 e v_0.

SOLUÇÃO

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (u_1 - u_0)$$

$$u_n - u_0 = n\,(u_1 - u_0)$$

$$u_n = u_0 + n\,u_1 - n\,u_0\,, \quad \text{mas} \quad u_0 = v_0 \ \text{e} \ u_1 = \frac{v_1}{3}$$

$$u_n = v_0 + n\left(\frac{v_1}{3} - v_0\right)$$

Como $u_n = \dfrac{v_n}{3^n}$, vem:

$$\boxed{v_n = 3^n\,v_0 + n\,.\,3^n\left(\frac{v_1}{3} - v_0\right)}$$

7a. QUESTÃO: ITEM C VALOR: 0,3

c) Identifique a natureza das sequências (v_n) e (u_n) quando

$$v_1 = 1 \quad \text{e} \quad v_0 = \frac{1}{3}$$

SOLUÇÃO

$$u_n = 1/3 + n\,(1/3 - 1/3)$$

$$u_n = 1/3$$

$$\boxed{(u_n) \text{ é constante}}$$

$$v_n = 3^n\,1/3 + 3^n\,\cancel{n\,(1/3 - 1/3)}^{\,0}$$

$$v_n = 3^n\,1/3 \;\Rightarrow\; v_n = 3^{n-1}$$

(v_n) é uma P.G. de razão 3.

8a. QUESTÃO: VALOR: 1,0

Dois clubes do Rio de Janeiro participaram de um campeonato nacional de futebol de salão onde cada vitória valia um ponto, cada empate meio ponto e cada derrota zero ponto. Sabendo que cada participante enfrentou todos os outros apenas uma vez, que os clubes do Rio de Janeiro totalizaram, em conjunto, oito pontos e que cada um dos outros clubes alcançou a mesma quantidade $\underline{k}$ de pontos, determine a quantidade de clubes que participou do torneio.

SOLUÇÃO

Seja $n + 2$ o número de clubes.

Foram disputados $C^2_{n+2} = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{2}$ jogos e, portanto,

$\dfrac{n^2 + 3n + 2}{2}$ pontos.

Ora, $\dfrac{n^2 + 3n + 2}{2} = 8 + nk \therefore n^2 + 3n - 14 = 2nk$

$$\frac{n^2 + 3n - 14}{n} = 2k.$$

Como $2k$ é inteiro, $n \mid (n^2 + 3n - 14)$ e, portanto, $n \mid 14$.

Logo, $\begin{cases} n = 1 \\ k = -5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n = 2 \\ k = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n = 7 \\ k = 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} n = 14 \\ k = 8 \end{cases}$

ABSURDO! ABSURDO!

A configuração $n = 7$ $k = 4$ é possível. Basta que todos os jogos empatem.

A configuração $n = 14$ $k = 8$ é possível. Basta que os times do Rio empatem entre si, os outros clubes empatem entre si; metade dos outros clubes vençam o primeiro clube do Rio e empatem com o outro e a outra metade vença o segundo clube do Rio e empate com o primeiro.

RESPOSTA: 9 ou 16.

9a. QUESTÃO: **VALOR: 1,0**

Um exame vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática.

Determine de quantas formas é possível programar a sequência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

SOLUÇÃO

Arrumemos inicialmente a seqüência das provas que não são de MATEMÁTICA:

$$\smile P_1 \smile P_2 \smile P_3 \smile P_4 \smile P_5 \smile P_6 \smile P_7 \smile .$$

$\boxed{7\,!\ \text{MODOS}}$

Agora escolhemos 3 dos 8 espaços para colocar as provas de matemática:

$\boxed{C_8^3\ \ \text{MODOS}}$

Agora escolhemos a ordem das provas de Matemática:

$\boxed{3\,!\ \text{MODOS}}$

A resposta é $\boxed{7\,!\ C_8^3\ .\ 3\,! = 5040\ .\ 56\ .\ 6 = 1.693.440}$

10a. QUESTÃO: **VALOR: 1,0**

Uma reta m_1 passa pelo ponto fixo $P_1(-1, -3)$ e intercepta a reta m_2 : $3x + 2y - 6 = 0$ no ponto A e a reta m_3 : $y - 3 = 0$ no ponto B. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo AB à medida que a reta m_1 gira em torno do ponto P_1.

SOLUÇÃO

$P\ (x_0, y_0)$

$$m_1 : \frac{x+1}{x_0+1} = \frac{y+3}{y_0+3}$$

$$B \begin{cases} (y+3)(x_0+1) = (y_0+3)(x+1) \\ y = 3 \end{cases} \quad \therefore \quad B\left(\frac{6x_0+3-y_0}{y_0+3} ; 3\right)$$

$$A \begin{cases} (y+3)(x_0+1) = (y_0+3)(x+1) \\ 3x+2y-6=0 \end{cases} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad A\left(\frac{12x_0 - 2y_0 + 6}{3x_0+2y_0+9} ; \frac{9y_0 - 9x_0 + 18}{3x_0+2y_0+9}\right)$$

Como P é médio de AB,

$$2y_0 = 3 + \frac{9y_0 - 9x_0 + 18}{3x_0+2y_0+9}$$

$$\boxed{4y_0^2 + 6x_0y_0 + 3y_0 = 45}$$

HIPÉRBOLE