1a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Dios números complexos Z_1 e Z_2, não nulos, são tais que

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1 - Z_2|$$

Mostre que $\dfrac{Z_2}{Z_1}$ é imaginário puro.

2a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} X^2 Y + XY^2 = 70 \\ (X+Y).\ (X^2 + Y^2) = 203 \end{cases}$$

3a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Dados dois cunjuntos A e B, define-se

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Prove que dados três conjuntos arbitrários X, Y e Z

$$X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$$

4a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Dados um sistema de eixos ortogonais XOY e um ponto A, de coordenadas (x_0, y_0), $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, considere dois pontos variáveis P e Q, P pertencente ao eixo OX e Q pertencente oa eixo OY, tais que a área do triângulo APQ seja costante e igual a K, $k \in \mathbb{R}$.

Calcule e identifique a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento PQ.

5a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja f uma função de uma variável real definida por

$f(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 3)$

onde $\ln$ é o logarítmo neperiano.

a) calcule o domínio e a imagem de f.

b) determine uma função $\varphi(x)$ com $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, tal que $f(x) = 2x + \varphi(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f.

c) faça o gráfico de f(x), indicando seus mínimos e máximos relativos e suas assíntotas.

6a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja f uma função bijetora de uma variável real e a relação h, definida por

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to (x^3, x - f(y))$

Verifique se h é bijetora e calcule uma relação g, tal que

$g \circ h\,(x,y) = (x,y)$

$h \circ g\,(x,y) = (x,y), \ \forall\, x, \forall\, y \in \mathbb{R}$

7a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Sejam a, b, c números inteiros tais que $100a + 10b + c$ seja divisível por 109.

Mostre que $(9a-c)^2 + 9b^2$ também é divisível por 109.

8a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Mostre que para todo número natural n maior ou igual a 2,

$$2^{\frac{5n}{4}} < \binom{2n}{n}$$

9a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} i & j & l & m \\ n & o & p & q \end{bmatrix}$$

duas matrizes de elementos inteiros. Verifique se a matriz AB é inversível.

10a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja p(x) um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) sabendo-se que p(x) assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que p(x) não possui raízes inteiras.

b) sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, p(x) assume o valor 14?

(1) $z_1 = a+bi \qquad z_1 + z_2 = (a+c)+(b+d)i$

$z_2 = c+di \qquad z_1 - z_2 = (a-c)+(b-d)i$

$$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

$$\sqrt{a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2} = \sqrt{a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2}$$

$$2ac+2bd = -2ac-2bd$$

$$4ac = -4bd \Rightarrow ac = -bd$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c+di}{a+bi}\cdot\frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{\cancel{ac}-bci+adi+\cancel{bd}}{a^2+b^2} = \frac{(ad-bc)i}{a^2+b^2} \; //$$

(2) $\begin{cases} xy(x+y) = 70 \\ (x^2+y^2)(x+y) = 203 \end{cases} \Rightarrow (x+y)^3 = 343$

$x+y=7$

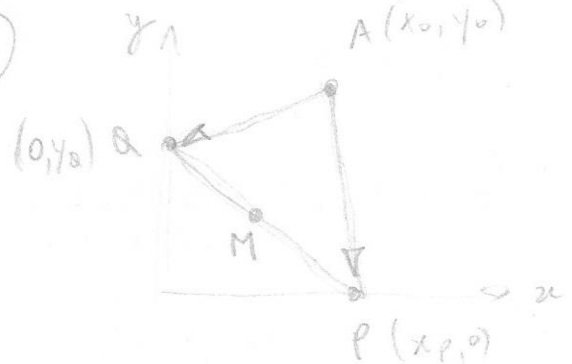
$xy=10$

$x=2$ e $y=5$ //

ou $x=5$ e $y=2$ //

(3) $X\cap(Y\Delta Z) = X\cap[(Y-Z)\cup(Z-Y)] = [X\cap(Y-Z)]\cup[X\cap(Z-Y)] = [X\cap Y - X\cap Z]\cup[X\cap Z - X\cap Y] = (X\cap Y)\Delta(X\cap Z)$ //

(4)



$S = \frac{1}{2}\left|\vec{AQ}\times\vec{AP}\right| = K$

$\left|\vec{AQ}\times\vec{AP}\right| = 2K$

$\vec{AQ} = (-x_0,\; y_Q - y_0)$

$\vec{AP} = (x_P - x_0,\; -y_0)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x_0 & y_Q - y_0 & 0 \\ x_P - x_0 & -y_0 & 0 \end{vmatrix} = x_0y_0 - (x_P - x_0)(y_Q - y_0) =$$

$$= \cancel{x_0y_0} - x_Py_Q + x_Py_0 + x_0y_Q - \cancel{x_0y_0} = 2K$$

$x_M = \frac{x_P}{2} \Rightarrow x_P = 2x_M$

$y_M = \frac{y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2y_M$

$\Rightarrow -2x_M\cdot 2y_M + 2x_My_0 + x_0\cdot 2y_M = 2K$

$\rightarrow -2xy + xy_0 + x_0y = K$

$\rightarrow y(x_0 - 2x) = K - xy_0$

$\rightarrow y = \dfrac{K - xy_0}{x_0 - 2x} = \dfrac{y_0}{2} + \dfrac{K - \frac{x_0y_0}{2}}{x_0 - 2x}$ //

hipérbole //

⑤ a) domínio: $e^{2x} - e^{x} + 3 > 0 \therefore \Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0 \therefore$ $\cup$ $\therefore > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

domínio $= \mathbb{R}$ //

imagem: máx $\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

mín $\Rightarrow 2e^{2x} - e^{x} = 0 \Rightarrow 2e^{2x} = e^{x} \Rightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln 2$

$$\ln\left(e^{2(-\ln 2)} - e^{(-\ln 2)} + 3\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{12}{4}\right) = \ln \frac{11}{4}$$

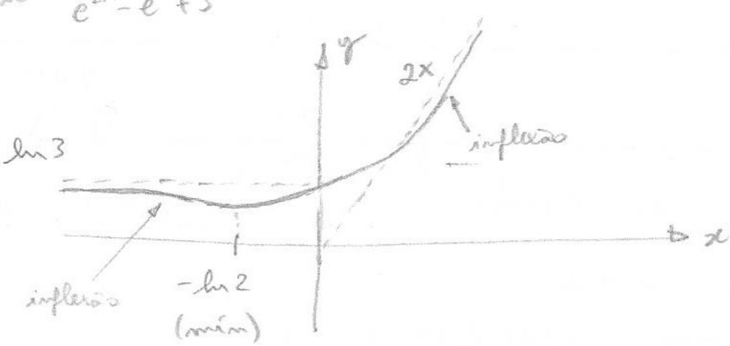
imagem $= \left[\ln \frac{11}{4}, \infty\right)$ //

b) $\varphi(x) = f(x) - 2x = \ln(e^{2x} - e^{x} + 3) - \ln e^{2x} = \ln(1 - e^{-x} + 3e^{-2x})$ //

$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim_{x \to \infty} \ln(1 - \underbrace{e^{-x}}_{0} + 3\underbrace{e^{-2x}}_{0}) = \ln 1 = 0$

c) $f(0) = \ln 3 \therefore f(-\ln 2) = \ln \frac{11}{4} \therefore \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 3 \therefore \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 3} \therefore$ se $x \uparrow \Rightarrow f(x) \sim \ln e^{2x} = 2x$



⑦

$$100a + 10b + c = 109k$$

$$9a - 109k + 100a + 10b = -c + 9a$$

$$(9a - c)^2 = \left(109(a-k) + 10b\right)^2 =$$

$$= 109^2 (a-k)^2 + 20b \cdot 109(a-k) + 100b^2$$

$$(9a-c)^2 + 9b^2 = 109^2 (a-k)^2 + 20b \cdot 109(a-k) + 109b^2 = 109k_1$$ //

⑥ a)

$(x_1, y_1) \to x_1^3, x_1 - f(y_1)$

$(x_2, y_2) \to x_2^3, x_2 - f(y_2)$

$x_1 = x_2$

$x_1 - f(y_1) = x_2 - f(y_2)$

$f(y_1) = f(y_2) \to y_1 = y_2$

b)

$g(\overbrace{x^3}^{a}, \overbrace{x - f(y)}^{b}) = (x, y)$

$x = \sqrt[3]{a}$

$b = x - f(y) = \sqrt[3]{a} - f(y) \therefore f(y) = \sqrt[3]{a} - b$

$y = f^{-1}(\sqrt[3]{a} - b) \therefore g(a,b) = (\sqrt[3]{a}, f^{-1}(\sqrt[3]{a} - b))$

$g(x,y) = (\sqrt[3]{x}, f^{-1}(\sqrt[3]{x} - y))$ //

$h(\sqrt[3]{x}, f^{-1}(\sqrt[3]{x} - y)) = (x, \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} + y) = (x, y)$ ok

⑧ Indução finita

$$m=2 \rightarrow 2^{\frac{5\cdot 2}{4}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2} \;\therefore\; \binom{2\cdot 2}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

$$\sqrt{2} < 1{,}5 \rightarrow 4\sqrt{2} < 6 \rightarrow \text{OK}$$

Se $2^{\frac{5m}{4}} < \binom{2m}{m}$, será que $2^{\frac{5(m+1)}{4}} < \binom{2(m+1)}{m+1}$?

$$2^{\frac{5(m+1)}{4}} = 2^{\frac{5m}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{4}}$$

$$\binom{2(m+1)}{m+1} = \frac{(2m+2)!}{(2m+2-m-1)!\,(m+1)!} = \frac{(2m+2)!}{(m+1)!\,(m+1)!} = \frac{(2m+2)(2m+1)(2m)!}{(m+1)\,m!\,(m+1)\,m!} = \frac{2(2m+1)}{m+1}\cdot\binom{2m}{m}$$

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(2m-m)!\,m!} = \frac{(2m)!}{m!\,m!}$$

$$2^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{32} < \sqrt[4]{81} = 3$$

$$\frac{2(2m+1)}{m+1} = \frac{4m+2}{m+1} = \frac{4m+4-2}{m+1} = 4 - \frac{2}{m+1}$$

$$m \uparrow \rightarrow 4 - \frac{2}{m+1} \uparrow$$

$$m \geq 2 \rightarrow \frac{2(2m+1)}{m+1} \geq \frac{2\cdot 5}{3} = \frac{10}{3} > 3$$

Se $2^{\frac{5m}{4}} < \binom{2m}{m}$ e $2^{\frac{5}{4}} < \frac{2(2m+1)}{m+1}$, então $2^{\frac{5(m+1)}{4}} < \binom{2(m+1)}{m+1}$ OK //

---

⑨

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j & l & m \\ m & o & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai+bm & aj+bo & al+bp & \cdots \\ ci+dm & cj+do & cl+dp & \cdots \\ ei+fm & ej+fo & el+fp & \cdots \\ gi+hm & gj+ho & gl+hp & \cdots \end{pmatrix}$$

1ª col $\cdot\, j$ − 2ª col $\cdot\, i$

2ª col $\cdot\, l$ − 3ª col $\cdot\, j$

$$\det = \begin{vmatrix} \cancel{aij}+bmj-\cancel{aji}-boi & aj+bo & al+bp & \cdots \\ \cancel{cij}+dmj-\cancel{cji}-doi & cj+do & cl+dp & \cdots \\ \cancel{eij}+fmj-\cancel{eji}-foi & ej+fo & el+fp & \cdots \\ \cancel{gij}+hmj-\cancel{gji}-hoi & gj+ho & gl+hp & \cdots \end{vmatrix} = (mj-oi)\begin{vmatrix} b & aj+bo & al+bp & \cdots \\ d & cj+do & cl+dp & \cdots \\ f & ej+fo & el+fp & \cdots \\ h & gj+ho & gl+hp & \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= (mj-oi)\begin{vmatrix} b & \cancel{ajl}+bol-\cancel{alj}-bpj & \cdots & \cdots \\ d & \cancel{cjl}+dol-\cancel{clj}-dpj & \cdots & \cdots \\ f & \cancel{ejl}+fol-\cancel{elj}-fpj & \cdots & \cdots \\ h & \cancel{gjl}+hol-\cancel{glj}-hpj & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = (mj-oi)(ol-pj)\begin{vmatrix} b & b & \cdots & \cdots \\ d & d & \cdots & \cdots \\ f & f & \cdots & \cdots \\ h & h & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \;//$$

não é inversível //

---

⑩ a) supor r raiz inteira

$p(x) = (x-r)\,q(x)$, onde $q(x)$ tem coefs $\in \mathbb{Z}$

$p(1) = $ ímpar $= (1-r)\,q(1)$

$q(1)$ e $1-r$ são ímpares $\rightarrow r$ é par

se $p(x) = a_{16}x^{16} + \ldots + a_0$

$p(0) = a_0$ é ímpar

$p(0) = -r \cdot q(0)$

$q(0)$ e r são ímpares

r par e ímpar $\rightarrow$ absurdo

ñ há raiz inteira //

b) supor que a, b, c, d sejam os valores de x tais que $p(x) = 7$

$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\,q(x) + 7$, onde $q(x)$ tem coefs $\in \mathbb{Z}$

supor que k seja tal que $p(k) = 14$

$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)\,q(x) = 7$

$(k-a)$, $(k-b)$, $(k-c)$ e $(k-d)$ são inteiros distintos

ñ se pode falar nada de $q(x)$

mas 7 só pode ser decomposto em, no máx, 3 fatores: $-1, +1, -7$

não há como decompor 7 em 4 ou 5 fatores $\rightarrow$ absurdo

ñ há inteiro tal que $p(x) = 14$ //