1ª QUESTÃO — ITEM ÚNICO — Valor: 1,25

ENUNCIADO: Considere um conjunto E e três de seus subconjuntos A, B, C. Sendo M um subconjunto de E, represente por M_E o seu complemento em relação a E. Determine E e os subconjuntos A, B, C, sabendo que A e C são disjuntos e que:

$(A \cup B \cup C)_E = \{4\ ,\ 6\}$ ... (1)

$B \cap C = \{\ 7\ \}$ ... (2)

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 7,\ 9,\ 10\}$ ... (3)

$A \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ ... (4)

$B_E = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$ ... (5)

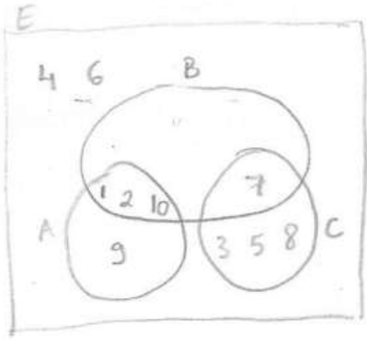
SOLUÇÃO

Da propriedade $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e de (2), (3) e (4), vem:

$A \cup \{7\} = \{1,2,7,9,10\}$.

Como de (2), $7 \in C$, e A e C são disjuntos, segue-se que

$\boxed{A = \{1,2,9,10\}}$ . ... (6)



De (4), (6) e do fato de A e C serem disjuntos

$\boxed{C = \{3,5,7,8\}}$ . ... (7)

De (1), (3) e (4), segue que

$\boxed{E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}}$ . ... (8)

De (8) e (5)

$\boxed{B = \{1,2,7,10\}}$

2ª QUESTÃO — ITEM ÚNICO — Valor: 1,25

ENUNCIADO: As partes REAL e COMPLEXA de um ponto $z = x + yi$ do PLANO COMPLEXO são representadas, respectivamente, por:

$x = Re(z)$, e, $y = Im(z)$.

Dados dois pontos do PLANO COMPLEXO, $z_1 = 2 + 3i$, e, $z_2 = 4 + 5i$, determine e esboce o LUGAR GEOMÉTRICO dos pontos do PLANO COMPLEXO que satisfazem à relação:

$$\text{Re}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = 0 \qquad , \text{ com,} \qquad z \neq z_2$$

SOLUÇÃO

Seja $z = x + yi$ e $x = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$.

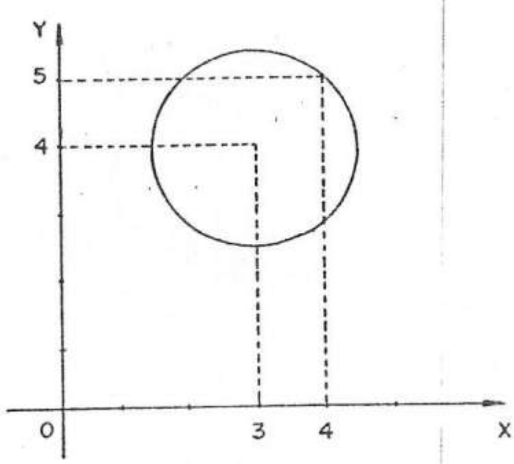
$$x = \frac{(x-2) + (y-3)i}{(x-4) + (y-5)i} = \frac{[(x-2) + (y-3)i][(x-4) - (y-5)i]}{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

Como $\text{Re}(X) = 0$, segue-se que

$(x-2)(x-4) + (y-3)(y-5) = 0$, ou seja,

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{2})^2$.

Logo, o lugar geométrico pedido é uma circunferência de centro no ponto $C(3,4)$ e raio $r = \sqrt{2}$. Como $z \neq z_2$, exclue-se desta circunferência o ponto $(4,5)$.



3ª QUESTÃO — ITEM ÚNICO — Valor: 1,25

ENUNCIADO:

Sendo $A = \left(\dfrac{1^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$, calcule, caso exista, $\lim\limits_{n\to\infty} A$.

SOLUÇÃO

$$A = \left[\frac{1 + 2^{1/n} + 3^{1/n}}{3}\right]^n$$

Por equivalência:

$u \to 0$

$a^u - 1 \sim u.\ln a$

tem-se:

$2^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n} . \ln 2$

$3^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n} . \ln 3.$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1 + 1 + \frac{1}{n}\ln 2 + 1 + \frac{1}{n}\ln 3}{3}\right]^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{3n}\ln 6\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{6}\right]^n = e^{\ln\sqrt[3]{6}}$$

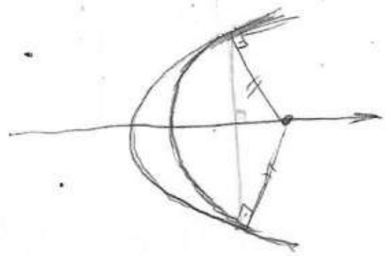
Assim

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} A = \sqrt[3]{6}}$$

4ª QUESTÃO — ITEM A — Valor: 0,5

ENUNCIADO: É dada a cônica (k), cuja equação é $y^2 = 6x$. Seja (c) uma circunferência com raio igual a $3\sqrt{3}$ e tangente a (k) em dois pontos distintos A e B. Determine o centro de (c) e as distâncias do vértice de (k) aos pontos A e B.

SOLUÇÃO



Da simetria:

$$\begin{cases} y^2 = 6x \\ (x-\alpha)^2 + y^2 = 27 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + 6x = 27 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 6x \\ x^2 + (6-2\alpha)x + (\alpha^2 - 27) = 0. \end{cases}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \leftrightarrow 36 - 24\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 108 = 0$$
$$\leftrightarrow 24\alpha = 144 \leftrightarrow \alpha = 6 \leftrightarrow \text{Centro } (6,0).$$

Pontos de tangência

$$x = \frac{2\alpha - 6}{2} = 3 \rightarrow y = \pm 3\sqrt{2}.$$

Distância: como V(0,0)

$$d(V,A) = d(V,B) = \sqrt{18+9} \leftrightarrow \text{Distância } 3\sqrt{3}.$$

4ª QUESTÃO — ITEM B — Valor: 0,75

ENUNCIADO: É dada a cônica (k), cuja equação é $y^2 = 6x$. Considere uma família de circunferências tangentes a (k), sabendo que cada circunferência desta família é tangente a (k) em dois pontos reais e distintos. Determine o LUGAR GEOMÉTRICO dos centros das circunferências desta família.

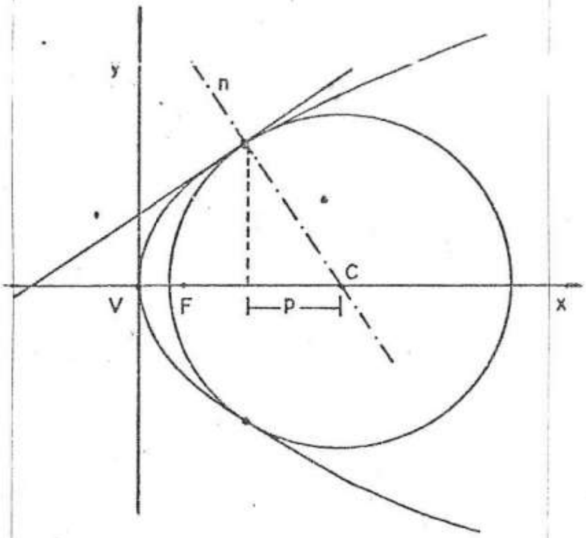
SOLUÇÃO

1ª Solução

O Centro de uma circunferência da família é a interseção da normal, num dos pontos de tangência, com o eixo das abscissas.

Como a subnormal é constante e igual ao parâmetro (P = 3), a posição limite do centro corresponde ao ponto (6,0).

Assim, o lugar geométrico é o conjunto dos pontos do eixo das abscissas com $x > 3$.



2ª Solução

As cônicas têm a mesma tangente nos pontos de interseção:

$y^2 = 6x \rightarrow 2yy' = 6 \qquad \ldots (1)$

$(x-\alpha)^2 + y^2 = R^2 \rightarrow 2(x-\alpha)+2yy'=0 \quad (2)$

Substituindo (1) em (2):

$2(x-\alpha) + 6 = 0 \rightarrow x = \alpha-3. \qquad \ldots (3)$

Como $x > 0$, de (3) vem $\alpha > 3$.

Assim, o lugar geométrico é o conjunto dos pontos do eixo das abscissas com $x > 3$.

3ª Solução

$$\begin{cases} y^2 = 6x & (x \geq 0) & \ldots (1) \\ (x-\alpha)^2 + y^2 = R^2. & & \ldots (2) \end{cases}$$

De (1) em (2), vem:

$$(x-\alpha)^2 + 6x = R^2$$

$$x^2 + (6-2\alpha)x + (\alpha^2-R^2) = 0.$$

Desejamos uma única solução positiva, ou seja:

$$\text{(i)} \quad S = -\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow -\frac{6-2\alpha}{2} > 0 \leftrightarrow \alpha > 3.$$

$$\text{(ii)} \quad \Delta = 0 \rightarrow (6-2\alpha)^2 - 4(\alpha^2-R^2) = 0$$

$$\leftrightarrow R^2 = 6\alpha - 9 > 0 \leftrightarrow \alpha > 3/2.$$

De (i) e (ii), resulta $\alpha > 3$.

Assim, o lugar geométrico é o conjunto dos pontos do eixo das abscissas com $x > 3$.

5ª QUESTÃO — ITEM ÚNICO — Valor: 1,25

ENUNCIADO: Suponha que r_1, r_2 e r_3 são as raízes da equação $x^3 + mx + n = 0$. Os coeficientes m e n são reais, sendo $n > m$. Sabendo que

$$\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{1+r_2} + \frac{1}{1+r_3} = 1 \ ,$$

e que $r_1 = r_2 \cdot r_3$,

determine m, n, r_1, r_2, r_3.

<u>Observação</u>: r_1 é igual ao produto de r_2 e r_3.

<u>SOLUÇÃO</u>

Fazendo-se a transformada aditiva $y = x + 1$, vem

$$y^3 - 3y^2 + (3+m)y - m + n - 1 = 0.$$

Fazendo-se, agora, a transformada às raízes inversas

$$(n-m-1)z^3 + (3+m)z^2 - 3z + 1 = 0.$$

A soma das raízes desta equação

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{-(3+m)}{n-m-1} = \frac{3+m}{m+1-n} \ .$$

Mas $z_i = \dfrac{1}{1+r_i}$, $i = 1,2,3$, assim

$$\frac{3+m}{m-n+1} = 1 \to 3 + \cancel{m} = \cancel{m} - n + 1 \to \boxed{n = -2}$$

Da equação proposta

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 0 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = m \to (r_2r_3 = r_1) \\ r_1r_2r_3 = -n \to -r_1^2 = -2 \to r_1^2 = 2 \to r_1 = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$$r_1(r_2 + r_3 + 1) = m$$

$$r_1(-r_1 + 1) = m$$

$$-r_1^2 + r_1 = m \qquad r_1 = m + 2$$

Como $m < n$ <u>e</u> $n = -2$

$$m < -2 \to r_1 < 0 \to \boxed{r_1 = -\sqrt{2}} \to \boxed{m = -(2 + \sqrt{2})} \ .$$

Assim

$$\left.\begin{array}{l} r_2 + r_3 = \sqrt{2} \\ r_2 \cdot r_3 = -\sqrt{2} \end{array}\right| \rightarrow t^2 - \sqrt{2}t - \sqrt{2} = 0$$

$$\rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_2 = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2} = r_3 \\ r_3 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2} = r_2. \end{cases}$$

6ª QUESTÃO — ITEM ÚNICO — Valor: 1,25

ENUNCIADO: Dada a curva, representada pela equação,

$$y = \frac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$$

determine os seus pontos de máximo e de mínimo, suas assíntotas, seus pontos pertencentes ao eixo x'x e esboce o gráfico da curva.
Observação: O sistema de eixos x'x e y'y é cartesiano ortogonal.

SOLUÇÃO

(i) Interseção com x'x

$$y = 0 \leftrightarrow 7x^2 + 20x = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{20}{7} \end{cases}$$

(ii) Assíntotas

- Verticais

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = +1 \end{cases} ;\ \underline{e}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -3^-} y = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} y = -\infty \end{cases} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty \end{cases}$$

- Horizontais

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = 7 \rightarrow y = 7.$$

- Inclinadas

Não há.

(iii) Valores Extremos

Primeira derivada $\quad y' = -6 \cdot \dfrac{x^2 + 7x + 10}{(x^2 + 2x - 3)^2}$.

Pontos críticos $\quad y' = 0 \leftrightarrow x = -2$ ou $x = -5$.

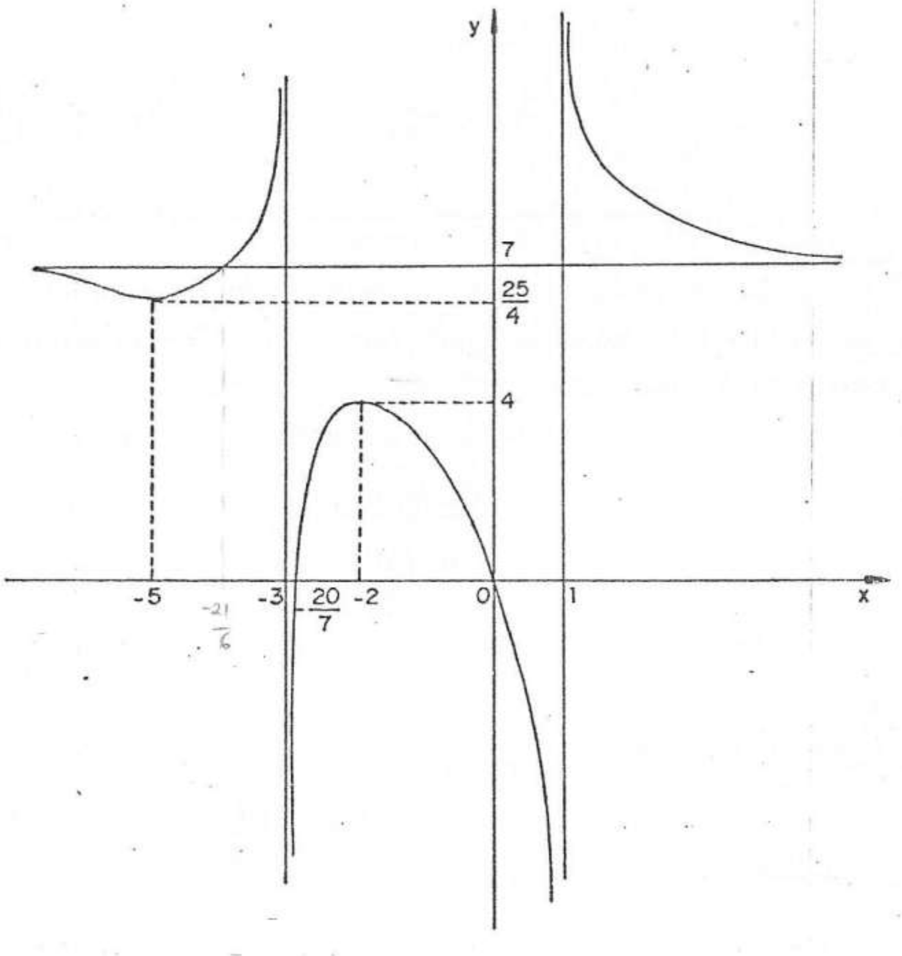
Identificação $\begin{cases} y'(-2^-) > 0 \\ y'(-2^+) < 0 \end{cases} \rightarrow y(-2) = 4$ é máximo relativo

$\begin{cases} y'(-5^-) < 0 \\ y'(-5^+) > 0 \end{cases} \rightarrow y(-5) = \frac{25}{4}$ é mínimo relativo

(iv) Esboço

Como $y' > 0 \leftrightarrow x > -2$ ou $x < -5$

$y' < 0 \leftrightarrow 5 < x < -2$, segue-se o esboço do gráfico.



7ª QUESTÃO ITEM ÚNICO Valor: 1,25

ENUNCIADO: Considere um POLINÔMIO $P(x)$, do sétimo grau. Sabendo que $\{P(x) + 1\}$ é divisível por $(x - 1)^4$ e que $\{P(x) - 1\}$ é divisível por $(x + 1)^4$, determine $P(x)$.

SOLUÇÃO

Tem-se que

$\{P(x) + 1\}'$ é divisível por $(x-1)^3 \rightarrow P'(x)$ é divisível por $(x-1)^3$;

$\{P(x) - 1\}'$ é divisível por $(x+1)^3 \rightarrow P'(x)$ é divisível por $(x+1)^3$.

Logo $P'(x)$ é divisível por $(x^2 - 1)^3$.

Como $P'(x)$ é do 6º grau:

$P'(x) \equiv K.(x^2 - 1)^3$

$P'(x) \equiv K.(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$.

Integrando

$$P(x) \equiv K\left[\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right] + C.$$

Mas

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = K\left[\frac{1}{7} - \frac{3}{5}\right] + C = -1 \\ \\ P(-1) = K\left[-\frac{1}{7} + \frac{3}{5}\right] + C = +1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C = 0 \\ \\ K = \frac{35}{16}. \end{array}\right.$$

Finalmente

$$P(x) \equiv \frac{5x^7}{16} - \frac{21x^5}{16} + \frac{35x^2}{16} - \frac{35x}{16}.$$

8ª QUESTÃO | ITEM ÚNICO | Valor: 1,25

ENUNCIADO: Considere uma turma com n alunos, numerados de 1 a n. Deseja-se organizar uma comissão de 3 alunos. De quantas maneiras pode ser formada esta comissão, de modo que não façam parte da mesma dois ou três alunos designados por números consecutivos?

SOLUÇÃO

$$C_n^3 - [(n-1)(n-2) - (n-2)] = C_n^3 - (n-2)(n-2) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - (n-2)^2 =$$

$$= (n-2) \cdot \frac{n^2 - n - 6n + 12}{6} =$$

$$= (n-2) \cdot \frac{n^2 - 7n + 12}{6} = C_{n-2}^3 .$$

TODAS TIRANDO:

1 2 ⇒ $m-2$ (exceto 1 e 2)

2 3 ⇒ $m-3$ (exceto 1, 2 e 3)

3 4 ⇒ $m-3$ (exceto 2, 3 e 4)

$m-2$ $m-1$ ⇒ $m-3$ (exceto $m-3$, $m-2$ e $m-1$)

$m-1$ m ⇒ $m-3$ (exceto $m-2$, $m-1$ e m)

$$C_{m,3} - [m-2 + (m-3)(m-2)] =$$

$$= C_{m,3} - (m-2)^2$$