IME - CEE 88/89 | ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA | FOLHA 1

1a. QUESTÃO ✓ VALOR: 1

Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de

$$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^2\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^4}\right)^5$$

SOLUÇÃO

$$\left[x^2+\frac{1}{x^5}\right]^2\cdot\left[x^3+\frac{1}{x^4}\right]^5=\left[\frac{x^7+1}{x^5}\right]^2\cdot\left[\frac{x^7+1}{x^4}\right]^5=\frac{(x^7+1)^7}{x^{30}}$$

o termo em x^{-9} será obtido a partir do termo em x^{21} de (x^7+1)

logo, como $(x^7+1)^7=\sum_{k=0}^{7} C_7^k\ x^{7k} \Rightarrow k=3$

$\Rightarrow$ COEFICIENTE $= C_7^3 = 35$

Esboce o gráfico da função

$$y = f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

assinalando os pontos críticos.

SOLUÇÃO

. FUNÇÃO:

$\text{dom}_y = \mathbb{R}$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 5$

sinal: $\quad + \quad | \quad + \quad | \quad - \quad \to$
$\qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 5$

. 1ª DERIVADA:

$$y' = \frac{5}{3} \cdot x^{-1/3} \cdot (2 - x)$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 2$

$\nexists y' \Rightarrow x = 0$

sinal: y' $\quad - \quad | \quad + \quad | \quad - \quad \to$

y $\quad \searrow \quad 0 \quad \nearrow \quad 2 \quad \searrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (0,0) \text{ é MÍNIMO} \\ (2,\ 3\sqrt[3]{4}) \text{ é MÁXIMO} \end{cases}$

. 2ª DERIVADA:

$$y'' = \frac{10}{9} \cdot x^{-4/3} \cdot (1 + x)$$

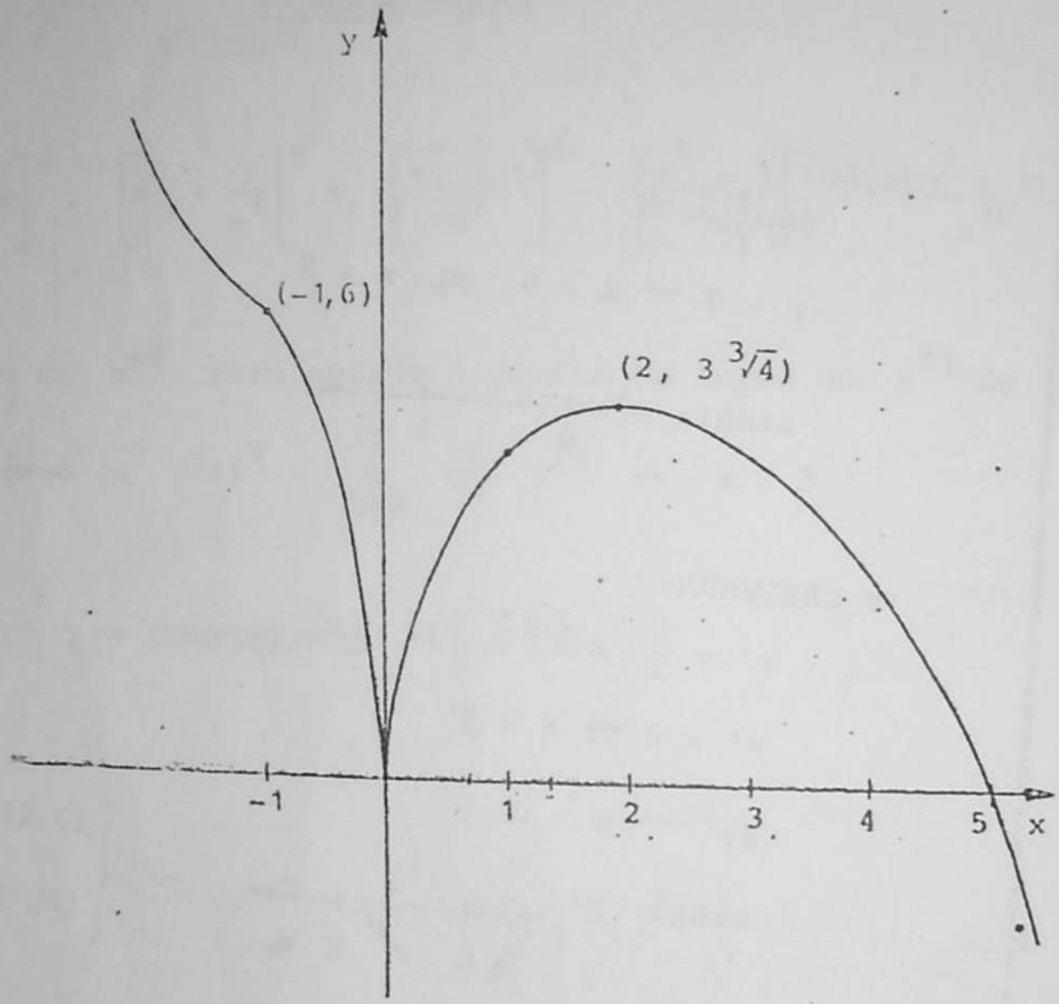
$y'' = 0 \Rightarrow x = -1$

$\nexists y'' \Rightarrow x = 0$

sinal: y'' $\quad + \quad | \quad - \quad | \quad - \quad \to$ $\quad \Rightarrow (-1,6)$ é INFLEXÃO

IME – CEE 88/89 | ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA | FOLHA 4

2a. QUESTÃO (Continuação)



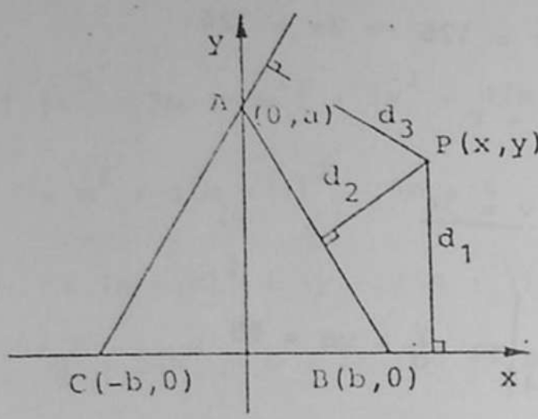
IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 5

3a. QUESTÃO ✓ VALOR: 1,0

Um ponto se move de modo que, o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo.

Determine a equação da trajetória deste ponto; identificando a curva descrita e respectivos parâmetros.

SOLUÇÃO



AB: $ax + by - ab = 0$

AC: $ax - by + ab = 0$

. distâncias:

$$d_1 = |y|$$

$$d_2 = \frac{|ax + by - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_3 = \frac{|ax - by + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_1^2 = d_2 . d_3 \Rightarrow y^2 = \frac{|a^2x^2 - (by - ab)^2|}{a^2 + b^2} \Rightarrow (a^2 + b^2)y^2 = |a^2x^2 - (by - ab)^2|$$

. identificação:

(i) $(a^2 + b^2)y^2 = - a^2x^2 + (b^2y^2 - 2ab^2y + a^2b^2)$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{b^2}{a}\right)^2 = b^2 + \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow \text{CIRCUNFERÊNCIA}$$

(ii) $(a^2 + b^2)y^2 = a^2x^2 - (b^2y^2 - 2ab^2y + a^2b^2)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2}} - \frac{\left(y - \frac{ab^2}{a^2 + 2b^2}\right)^2}{1} = \frac{a^2b^4}{(a^2 + 2b^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{b^4}{a^2 + 2b^2}} - \frac{\left(y - \frac{ab^2}{a^2 + 2b^2}\right)^2}{\frac{a^2b^4}{(a^2 + 2b^2)^2}} = 1 \Rightarrow \text{HIPÉRBOLE}$$

IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 7

1a. QUESTÃO ✓ VALOR: 1,0

Três números, cuja soma é 126, estão em progressão aritmética e outros três em progressão geométrica.

Somando os termos correspondentes das duas progressões obtém-se 85, 76 e 84 respectivamente.

Encontre os termos destas progressões.

SOLUÇÃO

I) $x - r,\ x\ ,\ x + r \Rightarrow x-r + x + x-r = 126 \Rightarrow 3x = 126$.

$\Rightarrow \underline{x = 42}$ $\therefore$ $42 - r,\ 42,\ 42 + r$

) $\frac{y}{q},\ q,\ yq \Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} y + 42 = 76 \Rightarrow \underline{y = 34} \\ \left.\begin{array}{l} \frac{y}{q} + 42 - r = 85 \\ yq + 42 + r = 84 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{y}{q} + yq = 85 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 34 + 34q^2 = 85q \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} q = 2 \\ \text{ou} \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

(a) $q = 2 \Rightarrow 17 + 42 - r = 85 \Rightarrow r = -26$

PA : 68, 42, 16

PG : 17, 34, 68

(b) $q = \frac{1}{2} \Rightarrow 68 + 42 - r = 85 \Rightarrow r = 25$.

PA : 17, 42, 67

PG : 68, 34, 17

5a. QUESTÃO ✓ VALOR: 1,0

Dada a equação

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0$$

a) determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um círculo.

b) determine o lugar geométrico dos centros destes círculos.

SOLUÇÃO

(a) $[x^2 - 2mx + m^2] + [y^2 - 4(m+1) + 4(m+1)^2] =$

$= m^2 + 4(m+1)^2 - 3m - 4$

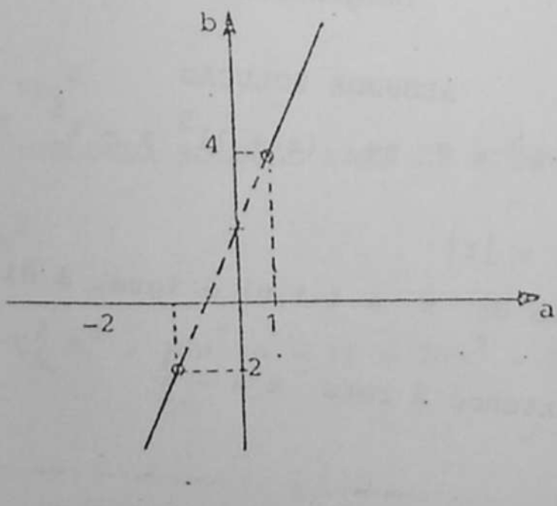
$\Rightarrow [x - m]^2 + [y - 2(m+1)]^2 = 5m^2 + 5m - 10$

$R^2 = 5(m^2 + m - 2) > 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 > 0 \Rightarrow \underline{m < -2 \text{ ou } m > 1}$

(b) $\left|\begin{array}{l} a = m \\ b = 2(m+1) \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 2a = 2m \\ b = 2m + 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow b - 2a = 2 \Rightarrow b = 2a + 2$ (reta)

com $\left|\begin{array}{llll} a < -2 & \text{ou} & a > 1 \\ b < -2 & \text{ou} & b > 4 \end{array}\right.$



ME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 11

6a. QUESTÃO ✓ VALOR: 1,0

Mostre que todas as raízes da equação $(z + 1)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário.

SOLUÇÃO

$$(z+1)^5 + z^5 = 0 \iff \left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = -1 \iff \left(1 + \frac{1}{z}\right)^5 = -1$$

$$\iff 1 + \frac{1}{z} = \sqrt[5]{-1} \iff 1 + \frac{1}{z} = \text{cis } \alpha$$

$$\iff \frac{1}{z} = -1 + \text{cis } \alpha \iff z = \frac{1}{-1 + \cos\alpha + i \text{ sen } \alpha}$$

$$\iff z = \frac{(-1 + \cos\alpha) - i \text{ sen } \alpha}{(-1+\cos\alpha)^2 + (\text{sen } \alpha)^2} = \frac{(-1 + \cos\alpha) - i \text{ sen } \alpha}{2(1 - \cos\alpha)} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\text{sen } \alpha}{2(1 - \cos\alpha)} i \quad , \text{ então}$$

$$\mathbb{R}(z) = -\frac{1}{2} \text{ (constante)}$$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} + yi$, logo z pertence à uma reta paralela ao eixo imaginário

SEGUNDA SOLUÇÃO

$$(z+1)^5 + z^5 = 0 \Rightarrow (z+1)^5 = -z^5 \Rightarrow |z+1|^5 = |z|^5$$

$$\Rightarrow |z+1| = |z|$$

A distância de z a $(-1,0)$ é igual à distância de z a $(0,0)$

$\Rightarrow$ z pertence à reta $x = -\frac{1}{2}$

7a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e, em cada círculo, marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos,

a) quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas;

b) quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados;

c) quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados;

d) quantos tetraedros com todos os vértices em faces diferentes podem ser formados.

OBS: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

SOLUÇÃO

(a) $C_{6n}^{2} - 6\,C_{n}^{2} = \dfrac{6n(6n-1)}{2} - \dfrac{6\,n(n-1)}{2} =$

$= 3n\,[6n - 1 - n + 1] = 3n \cdot 5n = 15\,n^2$

(b) $C_{6n}^{3} - C_{n}^{3} \times 6 = \dfrac{6n(6n-1)(6n-2)}{6} - \dfrac{n(n-1)(n-2)\,6}{6} =$

$= n[36n^2 - 18n + 2 - n^2 + 3n - 2] = 5n^2(7n-3)$

(c) $6[C_{n}^{3} \times 5n] = 30n\,\dfrac{(n-1)(n-2)n}{6} = 5n^2(n-1)(n-2)$

(d) $C_{6}^{4} \times (C_{n}^{1})^4 = 15n^4$

(SEGUNDA SOLUÇÃO PARA OS ITENS a e b)

(a) $\dfrac{n(5n).6}{2} = 15n^2$

(b) $6[C_{n}^{2} \times 5n] + C_{6}^{3}\,n^3 = 15n^2(n-1) + 20n^3 = 35n^3 - 15n^2 = 5n^2(7n-3$

3a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & b^2+2b+1 & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & c^2+2c+1 & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & d^2+2d+1 & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

pois tem duas filas paralelas iguais

IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 15

9a. QUESTÃO ✓

VALOR: 1,0

Resolva o sistema

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

SOLUÇÃO

fazendo $xy = z^6 \Rightarrow 7z^2 - 3z^3 = 4 \Rightarrow 3z^3 - 7z^2 + 4 = 0$

$z = 1$ é raiz $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -7 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 3 & -4 & -4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow 3z^2 - 4z - 4 = 0$$

$z = 2$ ou $\cancel{z = -\frac{2}{3}}$

$(z > 0)$

. $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow w^2 - 20w + 1 = 0 \Rightarrow w = 10 \pm 3\sqrt{11}$

. $z = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 64 \end{cases} \Rightarrow w^2 - 20w + 64 = 0 \Rightarrow w = 4$ ou $w = 16$

Logo as soluções, são:

$(10 + 3\sqrt{11},\ 10 - 3\sqrt{11})$; $(10 - 3\sqrt{11},\ 10 + 3\sqrt{11})$; $(4,16)$; $(16,4)$.

IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 17

.a. QUESTÃO

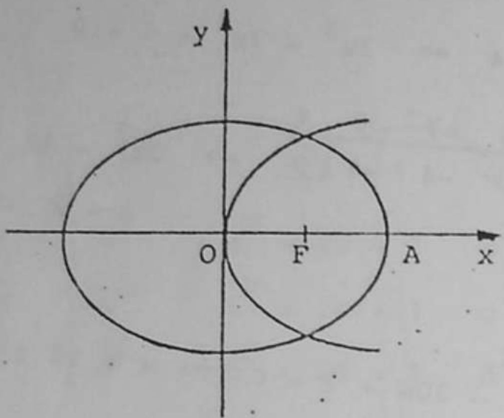
VALOR: 1,0

Seja uma elipse cujo eixo maior $AA' = 2a$ e cuja excentricidade é 1/2.

Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O, centro da elipse, e cujo foco coincide com o foco F da elipse.

Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de interseção.

SOLUÇÃO



. elipse: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$

. parábola: $OF = \frac{p}{2} = c \Rightarrow p = 2c$

$\Rightarrow y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 4cx$

. interseção: $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{4cx}{3c^2} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 16cx - 12c^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2c}{3}$ ou $\cancel{x = -6c} \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{6}c}{3}$

. tangentes:

parábola: $2yy' = 4c \Rightarrow m_1 = y' = \frac{2c}{y}$

elipse: $\frac{2x}{4c^2} + \frac{2yy'}{3c^2} = 0 \Rightarrow m_2 = y' = -\frac{3x}{4y}$

. ângulo: $|\text{tg}\ \theta| = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{2c}{y} + \frac{3x}{4y}}{1 - \frac{6cx}{4y^2}}\right| = \left|\frac{y(8c + 3x)}{4y^2 - 6cx}\right| = \left|\frac{\frac{2\sqrt{6}c}{3}.(8c + 2c}{\frac{32c^2}{3} - 4c^2}\right|$

$= \frac{20\sqrt{6}c^2}{20c^2} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow$ O ângulo agudo entre as tangentes é $\theta = \text{arctg}\ \sqrt{6}$