IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 1

1a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^5}\right)^2 \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^4}\right)^5$$

SOLUÇÃO

$$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^2 \cdot \left[x\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)\right]^5 = x^5\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^7$$

Necessitamos, portanto, do termo em x^{-14} do desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^7$ (pois $x^5 \cdot x^{-14} = x^{-9}$).

Temos: $T_{p+1} = C_7^p \left(\frac{1}{x^5}\right)^p \cdot (x^2)^{7-p} = C_7^p \, x^{14-7p}$

$14-7p = -14 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow T_5 = C_7^4 \, x^{-14}$

O coeficiente é $C_7^4 = C_7^3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

Resp: 35

2a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Esboce o gráfico da função

$$y = f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

assinalando os pontos críticos.

SOLUÇÃO

i) Dom $f = \mathbb{R}$; f não é par, nem ímpar

ii) $y' = f'(x) = \frac{10}{3} x^{-1/3} - \frac{5}{3} x^{2/3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2-x}{\sqrt[3]{x}}$

Pontos Críticos:

$y' = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

y' não existe $\Rightarrow \boxed{x=0}$

y'	$-\ \nexists$	$+\ 0$	$-$
	0	2	
y	decresc.	crescente	decresc.

f admite um mínimo relativo estrito p/ $x=0$: $m(0,0)$

" " " máximo " " p/ $x=2$: $M(2, 3\sqrt[3]{4})$

iii) $y'' = f''(x) = -\frac{10}{9} x^{-4/3} - \frac{10}{9} x^{-1/3} = -\frac{10}{9} \cdot \frac{1+x}{\sqrt[3]{x^4}}$

Pontos prováveis p/ inflexão:

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1$

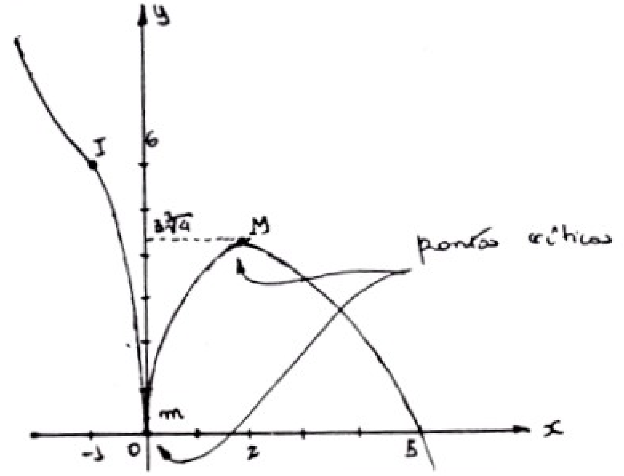
y'' não existe $\Rightarrow x = 0$

y''	$+\ 0$	$-\ \nexists$	$-$
	-1	0	
y	convexa	côncava	côncava

f admite um ponto de inflexão p/ $x=-1$: $I(-1,6)$

iv) Assíntotas: não há

v) Raízes: $y=0 \Rightarrow 5x^{2/3} = x^{5/3} \Rightarrow x = 5$



IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 5

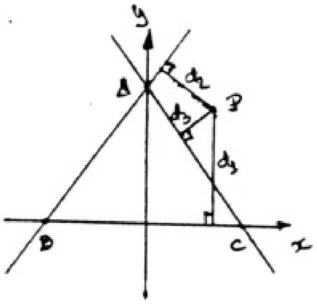
3a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Um ponto se move de modo que, o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo.

Determine a equação da trajetória deste ponto; identificando a curva descrita e respectivos parâmetros.

SOLUÇÃO



Sejam $A(0,k)$, $B(-m,0)$ e $C(m,0)$ os vértices do triângulo, com $k, m > 0$.

Sendo $P(x,y)$ um ponto da trajetória:

$$d_1^2 = d_2 \cdot d_3$$

Mas: $d_1 = |y|$

reta AB: $y = \frac{k}{m}x + k \rightarrow kx - my + mk = 0 \rightarrow d_2 = \frac{|kx - my + mk|}{\sqrt{k^2+m^2}}$

reta AC: $y = -\frac{k}{m}x + k \rightarrow kx + my - mk = 0 \rightarrow d_3 = \frac{|kx + my - mk|}{\sqrt{k^2+m^2}}$

Daí: $y^2 = \frac{|k^2x^2 - (my - mk)^2|}{\sqrt{k^2+m^2}^{\,2}} \rightarrow (k^2+m^2)y^2 = |k^2x^2 - m^2y^2 + 2m^2ky - m^2k^2|$

$k^2x^2 - m^2y^2 + 2m^2ky - m^2k^2 = (k^2+m^2)y^2$ ou $k^2x^2 - m^2y^2 + 2m^2ky - m^2k^2 = -(k^2+m^2)y^2$

$k^2x^2 - (k^2+2m^2)y^2 + 2m^2ky - m^2k^2 = 0$ ou $k^2x^2 + k^2y^2 + 2m^2ky - m^2k^2 = 0$

i) $k^2x^2 - (k^2+2m^2)\left[y^2 - \frac{2m^2k}{k^2+2m^2}y + \frac{m^4k^2}{(k^2+2m^2)^2}\right] = m^2k^2 - \frac{m^4k^2}{k^2+2m^2} = \frac{m^2k^2(k^2+m^2)}{k^2+2m^2}$

$$\frac{x^2}{\frac{m^2(k^2+m^2)}{k^2+2m^2}} - \frac{\left(y - \frac{m^2k}{k^2+2m^2}\right)^2}{\frac{m^2k^2(k^2+m^2)}{(k^2+2m^2)^2}} = 1$$

Hipérbole de centro $\left(0, \frac{m^2k}{k^2+2m^2}\right)$, eixo principal $2a = \frac{2m\sqrt{(k^2+m^2)(k^2+2m^2)}}{k^2+2m^2}$ e eixo secundário $2b = \frac{2mk\sqrt{k^2+m^2}}{k^2+2m^2}$

ii) $x^2 + y^2 + 2\frac{m^2}{k}y - m^2 = 0$ Circunferência de centro $\left(0, -\frac{m^2}{k}\right)$ e raio $\sqrt{\frac{m^4}{k^2} + m^2} = \frac{m}{k}\sqrt{m^2+k^2}$

A trajetória é a união da hipérbole com a circunferência, sendo k a altura do triângulo e 2m sua base.

4a. QUESTÃO

VALOR: 1,0

Três números, cuja soma é 126, estão em progressão aritmética e outros três em progressão geométrica.

Somando os termos correspondentes das duas progressões obtém-se 85,76 e 84 respectivamente.

Encontre os termos destas progressões.

SOLUÇÃO

PA: $a-r$, a, $a+r$

PG: $\frac{b}{q}$, b, bq

$$a-r+a+a+r=126 \Rightarrow \boxed{a=42}$$

$$\begin{cases} 42-r+\frac{b}{q}=85 \\ 42+b=76 \Rightarrow \boxed{b=34} \\ 42+r+bq=84 \end{cases} \qquad \begin{cases} 42-r+\frac{34}{q}=85 \\ 42+r+34q=84 \end{cases}$$

~~Somando~~: $84+34\left(\frac{1}{q}+q\right)=85+84 \Rightarrow 2\,\frac{q^2+1}{q}=5$

$$2q^2-5q+2=0 \Rightarrow q=2 \text{ ou } q=1/2$$

$$q=2 \Rightarrow r=-26 \qquad q=1/2 \Rightarrow r=25$$

Daí, os termos são:

PA: 68, 42, 16
PG: 17, 34, 68

ou

PA: 17, 42, 67
PG: 68, 34, 17

IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 9

5a. **QUESTÃO** VALOR: 1,0

Dada a equação

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4\,(m+1)\,y + 3m + 14 = 0$$

a) determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um círculo.

b) determine o lugar geométrico dos centros destes círculos.

SOLUÇÃO

a) centro: $\left(m,\ 2(m+1) \right)$

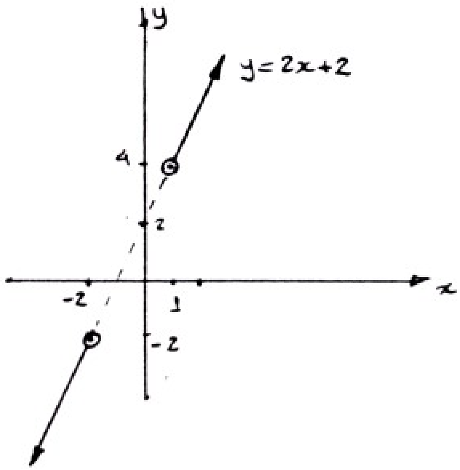
raio: $\sqrt{m^2 + 4(m+1)^2 + (-3m-14)} = \sqrt{5m^2+5m-10}$

$5m^2+5m-10 > 0 \Rightarrow m^2+m-2>0$

$\underline{m<-2 \text{ ou } m>1}$.

b) $\begin{cases} x = m \\ y = 2(m+1) \end{cases} \Rightarrow y = 2x+2 \quad , \quad x<-2 \text{ ou } x>1$

(união de duas semi-retas)



IME – CEE 88/89	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA		FOLHA 11

6a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Mostre que todas as raízes da equação $(z + 1)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário.

SOLUÇÃO

RESOLVIDO EM SALA (JÁ "CAIU" NO CONCURSO DO ITA)

$(z+1)^5 = -z^5 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = -1 \Rightarrow$ os valores de $\frac{z+1}{z}$ são as raízes quintas de $-1 = \operatorname{cis}\pi$; daí :

$$\frac{z_k+1}{z_k} = \operatorname{cis}\frac{\pi+2k\pi}{5} \Rightarrow 1+\frac{1}{z_k} = \operatorname{cis}\frac{\pi+2k\pi}{5} \Rightarrow \frac{1}{z_k} = \operatorname{cis}\frac{\pi+2k\pi}{5} - 1$$

$$z_k = \frac{1}{\operatorname{cis}\frac{\pi+2k\pi}{5} - 1} = \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} - 1\right) + i \operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{5}}$$

$$z_k = \frac{\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} - 1\right) - i\operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{5}}{\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} - 1\right)^2 + \operatorname{sen}^2\frac{\pi+2k\pi}{5}} = \frac{\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} - 1\right) - i\operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{5}}{2 - 2\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_k) = \frac{\cos\frac{\pi+2k\pi}{5} - 1}{2\left(1-\cos\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)} = -\frac{1}{2} \quad , \ k = 0,1,2,3,4$$

Logo, todas as raízes pertencem à reta $\operatorname{Re}(z) = -1/2$, que é paralela ao eixo imaginário.

7a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e, em cada círculo, marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos,

a) quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas;

b) quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados;

c) quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados;

d) quantos tetraedros com todos os vértices em faces diferentes podem ser formados.

OBS: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

SOLUÇÃO

a) $\dfrac{n.5n.6}{2} = 15n^2$

b) $C_{6n}^3 - 6\,C_n^3$

c) $C_n^3 . 5n . 6 = 5n^2(n-1)(n-2)$

d) $C_6^4 . n.n.n.n = 15n^4$

8a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$$

SOLUÇÃO

(coluna 4 - coluna 3 ; coluna 3 - coluna 2 ; coluna 2 - coluna 1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix} =$$

(coluna 4 - coluna 3 ; coluna 3 - coluna 2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(filas paralelas iguais)

9a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Resolva o sistema

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

SOLUÇÃO

Fazendo $\sqrt[6]{xy} = z \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{xy} = z^2 \\ \sqrt{xy} = z^3 \end{cases}$

$7z^2 - 3z^3 = 4 \Rightarrow 3z^3 - 7z^2 + 4 = 0$

Por inspeção, $z = 1$ é raiz

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -7 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 3 & -4 & -4 & \underline{\lfloor 0} \end{array}$$

$(z-1)(3z^2 - 4z - 4) = 0$

Outras raízes: $z = 2$ ou $z = -2/3$

Assim: $\sqrt[6]{xy} = 1$ ou $\sqrt[6]{xy} = 2$ ou $\cancel{\sqrt[6]{xy} = -\frac{2}{3}}$ (compatibilidade)

i $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 20 \end{cases}$ ou ii $\begin{cases} xy = 64 \\ x + y = 20 \end{cases}$

$(x = 10 + 3\sqrt{11}$ e $y = 10 - 3\sqrt{11})$ ou $(x = 10 - 3\sqrt{11}$ e $y = 10 + 3\sqrt{11})$

ii $(x = 16$ e $y = 4)$ ou $(x = 4$ e $y = 16)$

$S = \{(10 + 3\sqrt{11}, 10 - 3\sqrt{11}), (10 - 3\sqrt{11}, 10 + 3\sqrt{11}), (16, 4), (4, 16)\}$

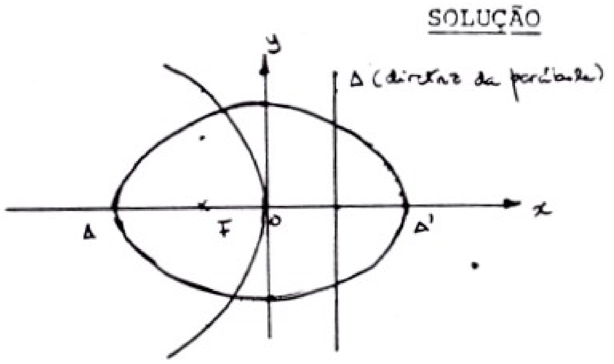
10a. QUESTÃO — VALOR: 1,0

Seja uma elipse cujo eixo maior AA' = 2a e cuja excentricidade é 1/2.

Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O, centro da elipse, e cujo foco coincide com o foco F da elipse.

Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de interseção.

SOLUÇÃO



Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2c$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}\,c$

Daí: $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12c^2$

Parábola: $y^2 = -2px$; $p = 2c$

Daí: $y^2 = -4cx$

Interseção: $3x^2 - 16cx = 12c^2 \Rightarrow 3x^2 - 16cx - 12c^2 = 0$

$$x = \frac{16c \pm 20c}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2c}{3} \text{ ou } \cancel{x = 6c} \text{ (não satisfaz, pois } x<0) \\ \Downarrow \\ y = \pm \frac{2\sqrt{6}\,c}{3} \end{cases} \quad P\left(-\frac{2c}{3}, \pm\frac{2\sqrt{6}\,c}{3}\right)$$

Derivando implicitamente:

$6x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3x}{4y}$; $m_1 = y'\big|_P = \pm\frac{\sqrt{6}}{8}$

$2yy' = -4c \Rightarrow y' = -\frac{2c}{y}$; $m_2 = y'\big|_P = \mp\frac{\sqrt{6}}{2}$

Sendo θ o ângulo entre as curvas: $tg\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

$$tg\,\theta = \left|\frac{\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{8}\right) - \left(\mp\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{1 + \left(\pm\frac{\sqrt{6}}{8}\right)\left(\mp\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}\right| = \frac{5\sqrt{6}/8}{5/8} = \sqrt{6} \Rightarrow \boxed{\theta = arc\,tg\,\sqrt{6}}$$