1a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^5}\right)^2 \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^4}\right)^5.$$

2a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Esboce o gráfico da função

$$y = f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

Assinale os pontos críticos.

3a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Um ponto se move de modo que o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo.

Determine a equação da trajetória deste ponto; identificando a curva descrita e respectivos parâmetros.

4a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Três números, cuja soma é 126, estão em progressão aritmética e outros três em progressão geométrica.

Somando os termos correspondentes das duas progressões obtém - se 85, 76 e 84 respectivamente.

Encontre os termos destas progressões.

5a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Dada a equação

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0$$

a) Determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um círculo.

b) Determine o lugar geométrico dos centros destes círculos.

6a. QUESTAO VALOR: 1,0

Mostre que todas as raízes da équação $(z+1)^5 + z^5 = 0$ pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo imaginário.

7a: QUESTÃO VALOR: 1,0

Calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$$

8a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Resolva o sistema

$$\begin{cases} 7\sqrt[3]{xy} - 3\sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

9a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Seja uma elipse cujo eixo maior $AA' = 2a$ e cuja excentricidade é 1/2.

Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a a parábola, cujo vértice é o ponto 0, centro da elipse, e cujo foco coincide com o foco F da elipse.

Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de interseção.

10a. QUESTÃO VALOR: 1,0

Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e, em cada círculo, marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos,

a) quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas?

b) quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados?

c) quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados?

d) quantos tetraedros com todos os vértices em faces diferentes podem ser formados?

OBS: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

① $\left(\frac{x^7+1}{x^5}\right)^2\left(\frac{x^7+1}{x^4}\right)^5 = \frac{(x^7+1)^7}{x^{30}} \Rightarrow \frac{\binom{7}{p}(x^7)^{7-p}}{x^{30}} \rightarrow$ $49-7p-30=-9$ $\rightarrow 28 = 7p \rightarrow p=4$

$\rightarrow \binom{7}{4} = \frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5}{\cancel{6}} = 35$ //

---

④ $a_1+a_2+a_3=126$

b_1, b_2, b_3

$\frac{b_2}{q}+b_2+b_2q=119$

$1+q+q^2=\frac{119}{34}q=\frac{7q}{2}$

$a_1+b_1=85$
$\rightarrow a_2+b_2=76$
$a_3+b_3=84$ +

$126+b_1+b_2+b_3=245$
$b_1+b_2+b_3=119$

$a_1=a_2-R \therefore a_3=a_2+R \therefore a_1+a_2+a_3=3a_2=126$

$\rightarrow a_2=42 \rightarrow b_2=76-a_2=76-42=34$

$q^2-\frac{5q}{2}+1=0 \therefore q=\frac{\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}}{2}=\frac{5/2\pm 3/2}{2} \nearrow 2, \searrow \frac{1}{2}$

$q=2 \rightarrow b_1=17, b_3=68, a_1=68, a_3=16$

$\rightarrow (68,42,16)$ e $(17,34,68)$ //

$q=\frac{1}{2} \rightarrow b_1=68, b_3=17, a_1=17, a_3=67$

$(17,42,67)$ e $(68,34,17)$ //

---

⑤ a) $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0 \rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

Ident: $\alpha=m$, $\beta=2(m+1)$, $\alpha^2+\beta^2-R^2=3m+14$ $\Rightarrow m^2+4m^2+8m+4-R^2=3m+14$, onde $R^2>0$.

$\rightarrow m^2+m-2>0 \rightarrow m<-2$ ou $m>1$ //

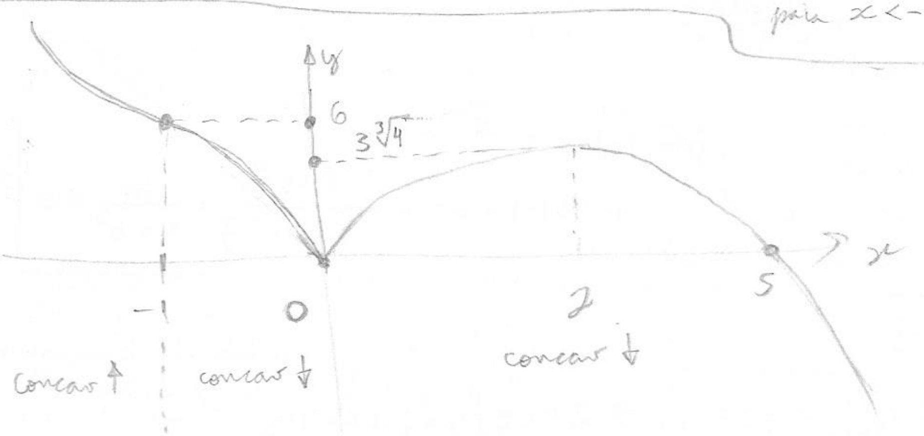
$+ \quad - \quad +$
$-2 \quad 1$

b) Os centros têm coordenadas $(m, 2m+2) \rightarrow y_c=2x_c+2 \rightarrow$ É a reta $y=2x+2$,

para $x<-2$ ou $x>1$ //

---

②



$5x^{2/3}-x^{5/3}=x^{2/3}[5-x]$

raízes: $x=0$; $x=5$.

$y'=\frac{10}{3x^{1/3}}-\frac{5}{3}x^{2/3} \Rightarrow y'=0$ se $x=2$

$y''=\frac{-10}{9x^{4/3}}-\frac{10}{9x^{1/3}} \Rightarrow y''=0$ se $x=-1$

$x=2 \Rightarrow y''<0 \Rightarrow$ máximo

$x=0 \Rightarrow \nexists\, y' \Rightarrow$ não é derivável $\Rightarrow$ cúspide!!!

$x=2 \Rightarrow y=5\cdot 2^{2/3}-2^{5/3}=5\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{4}=3\sqrt[3]{4}$

$x>0 \Rightarrow y''<0 \Rightarrow$ Concavidade p/ baixo

$x\rightarrow\infty \Rightarrow y\rightarrow-\infty$

$x\rightarrow-\infty \Rightarrow y\rightarrow+\infty$

$x=-1 \Rightarrow y=5-(-1)=6$

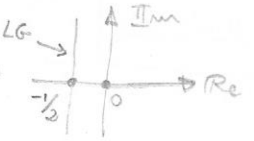
$x=-8 \Rightarrow y''=\frac{10}{3\cdot 2}-\frac{5}{3}\cdot 2^2=\frac{10}{6}-\frac{40}{6}=-5<0$

concav ↓

$x=0$ raiz e cúspide //
$x=2$ pt de máximo //
$x=5$ raiz //
$x=-1$ pt de inflexão //

⑥ $(z+1)^5 + z^5 = 0 \therefore z = a+bi \therefore (a+1+bi)^5 = -(a+bi)^5 \therefore$

igualando os módulos $\to (a+1)^2 + b^2 = a^2 + b^2 \to 2a+1=0 \to a = -\frac{1}{2} \to$



---

⑩ 6 faces, cada uma com m pontos

a) cada um dos $6m$ pontos pode ser ligado a qualquer um dos $5m$ pontos de outras faces

$6m \cdot 5m = 30m^2 \to$ temos que dividir por 2 $\to AB = BA \to 15m^2$ //

b) vamos calcular o total de triângulos e subtrair o total de triângulos numa mesma face.

$$\text{Total} = \frac{6m(6m-1)(6m-2)}{6} \therefore \text{em uma mesma face} = 6 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

6 ← elimina repetições ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

nº de faces

6 ← elimina repetições

$$m(6m-1)(6m-2) - m(m-1)(m-2) = m(36m^2 - 12m - 6m + 2 - (m^2 - 3m + 2)) = m(35m^2 - 15m) =$$
$$= 35m^3 - 15m^2 //$$

c) cada um dos $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ triângulos de uma face pode ser ligado a $5m$ pontos de outras faces

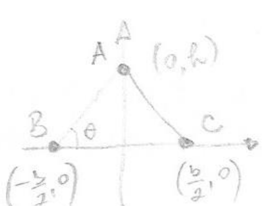
Nas 6 faces, $6 \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{6} \cdot 5m = 5m^2(m-1)(m-2)$ //

d) primeiro escolhemos 4 faces entre as 6, eliminando as repetições $\to C_{6,4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

em cada face, podemos escolher m pts $\to 15 \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m = 15m^4$ //

---

③



$tg\,\theta = \frac{h}{b/2} = \frac{2h}{b}$

$y_{AB} = \frac{2h}{b} x_{AB} + h$

$y_{AC} = -\frac{2h}{b} x_{AC} + h$

$y_{BC} = 0$

distância de P até BC = y

distância de $P(x_0,y_0)$ à reta $ax+by+c=0$ é $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

distância de P até AB = $\frac{|2hx - by + bh|}{\sqrt{4h^2+b^2}}$

distância de P até AC = $\frac{|2hx + by - bh|}{\sqrt{4h^2+b^2}}$

$$y^2 = \frac{|4h^2x^2 - (by-bh)^2|}{4h^2+b^2}$$

1ª hipótese $\to y^2(4h^2+b^2) = 4h^2x^2 - (by-bh)^2 \therefore 4h^2y^2 + b^2y^2 = 4h^2x^2 - b^2y^2 + 2b^2hy - b^2h^2$

$$\underbrace{4h^2}_{A}x^2 \underbrace{+0}_{B}xy - \underbrace{(4h^2+2b^2)}_{C}y^2 + \underbrace{0}_{D}x + \underbrace{2b^2h}_{E}y \underbrace{-b^2h^2}_{F} = 0$$ ← eq geral

$B^2 - 4AC = 0 - 4 \cdot 4h^2 \cdot (-(4h^2+2b^2)) = 32h^2(2h^2+b^2) > 0 \to$ hipérbole //

2ª hipótese $\to y^2(4h^2+b^2) = -4h^2x^2 + (by-bh)^2 \therefore 4h^2y^2 + \cancel{b^2y^2} = -4h^2x^2 + \cancel{b^2y^2} - 2b^2hy + b^2h^2 \quad (\div 4h^2)$

$$x^2 + y^2 + \frac{b^2}{2h}y + \frac{b^4}{16h^2} = \frac{b^2}{4} + \frac{b^4}{16h^2} \therefore (x-0)^2 + \left(y + \frac{b^2}{4h}\right)^2 = \frac{4b^2h^2}{16h^2} + \frac{b^4}{16h^2} = \frac{b^2(b^2+4h^2)}{16h^2}$$

circunferência de centro $\left(0, -\frac{b^2}{4h}\right)$ e raio $\frac{b\sqrt{b^2+4h^2}}{4h}$ //

⑧ se $\sqrt[6]{xy} = a \to 7a^2 - 3a^3 - 4 = 0 \to a_1 = 1$ é raiz (inspeção)

$$\begin{array}{l|l} -3a^3 + 7a^2 + 0a - 4 & a-1 \\ \underline{+3a^3 - 3a^2} & -3a^2+4a+4 \\ \quad 4a^2 + 0a - 4 & \\ \quad \underline{-4a^2 + 4a} & \\ \quad\quad +4a - 4 & \\ \quad\quad \underline{-4a + 4} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow a_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-3)4}}{-6} = \frac{-4 \pm 8}{-6} \nearrow 2 \quad \searrow -\frac{2}{3}$ NÃO

1ª hipótese: $\sqrt[6]{xy} = 1 \to xy = 1$ e $x + y = 20$ ($\frac{x}{y}$ ou $\frac{y}{x}$)

$k^2 - 20k + 1 = 0 \therefore k = \frac{20 \pm \sqrt{400-4}}{2} = 10 \pm \sqrt{99} = 10 \pm 3\sqrt{11}$ //

2ª hipótese: $\sqrt[6]{xy} = 2 \to xy = 64$ e $x+y=20$ ($\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$)

$k^2 - 20k + 64 = 0 \therefore k = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4\cdot 64}}{2} = 10 \pm \sqrt{36} = 4$ e 16 //

---

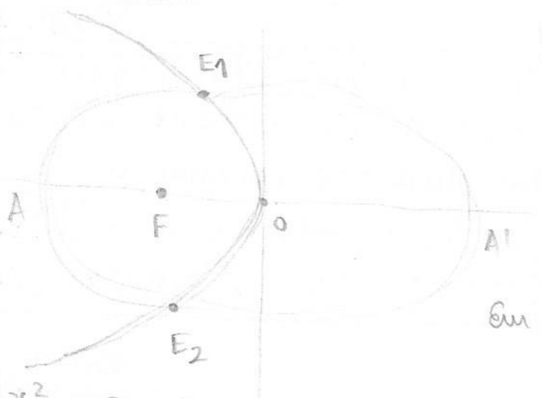
⑦

$$\begin{bmatrix} a^2 & a^2+2a+1 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & b^2+2b+1 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & c^2+2c+1 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & d^2+2d+1 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a^2 & 2a & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & 2b & b^2+4b+4 & b^2+6b+9 \\ c^2 & 2c & c^2+4c+4 & c^2+6c+9 \\ d^2 & 2d & d^2+4d+4 & d^2+6d+9 \end{bmatrix}}_{\text{ZERO}//} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} a^2 & 1 & a^2+4a+4 & a^2+6a+9 \\ b^2 & 1 & \vdots & \vdots \\ c^2 & 1 & & \\ d^2 & 1 & & \end{bmatrix}}_{\text{Zero}//} = \text{ZERO}//$$

---

⑨



$y^2 = -2px \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \to c = \frac{a}{2} \to OF = \frac{a}{2}$

$\frac{p}{2} = \frac{a}{2} \to p = a \to y^2 = -2ax$ // $\qquad b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{3a^2}{4}} = 1$

Em E_1: Derivada: $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{\frac{3a^2}{4}} = 0 \to 2x + \frac{2yy'}{\frac{3}{4}} = 0 \to$

$\to x + \frac{yy'}{\frac{3}{4}} = 0 \to x + \frac{4yy'}{3} = 0 \to y' = \frac{-x\cdot 3}{4y}$ (elipse)

$\to 2yy' = -2a \to y' = -\frac{a}{y}$ (parábola)

$E_1: \to \frac{3x^2}{3a^2} - \frac{2ax\cdot 4}{3a^2} = \frac{3a^2}{3a^2} \to$

$\to 3x^2 - 8ax - 3a^2 = 0$

$x = \frac{8a \pm a\sqrt{64 - 4(3)(-3)}}{6} = \frac{8a \pm 10a}{6} \nearrow 3a \quad \searrow -\frac{a}{3}$

$x = -\frac{a}{3}$ //

$y^2 = -2a \cdot -\frac{a}{3} = \frac{2a^2}{3} \to y = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$|tg\alpha| = \frac{-\frac{3x}{4y} + \frac{4a}{4y}}{1 + -\frac{3x}{4y}\cdot\left(-\frac{a}{y}\right)} = \frac{(4a - 3x)y}{4y^2 + 3ax}$

$\to |tg\alpha| = \frac{(4a + a)\frac{a\sqrt{6}}{3}}{4\cdot\frac{2a^2}{3} + 3\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)a} = \frac{\frac{5a^2\sqrt{6}}{3}}{\frac{8a^2}{3} - \frac{3a^2}{3}} = \frac{5a^2\sqrt{6}}{5a^2} = \sqrt{6}$ //

$tg\,\alpha = \pm\sqrt{6}$

$\to \boxed{tg\alpha = \sqrt{6}}$