1ª QUESTÃO

VALOR: 1,0

Calcule o determinante da matriz n x n que possui zeros na diagonal principal e todos os outros elementos iguais a 1.

SOLUÇÃO

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

(matriz triangular)

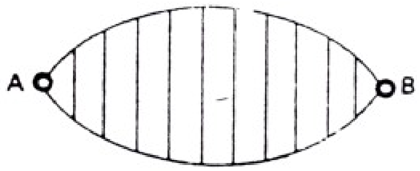
$$= (n-1)\cdot(-1)^{n-1} = \begin{cases} n-1, & n \text{ ímpar} \\ -n+1, & n \text{ par} \end{cases}$$

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 2

2ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão-dupla, ligam as duas estradas principais como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B.

Obs.: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.



SOLUÇÃO

O número de caminhos é igual ao dobro do nº de escolhas de estradas secundárias (verticais).

Daí: $2 \cdot 2^{10} = 2^{11} = 2048$

IME – CEE 89/90	ALGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 3
3ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Considere a família de retas representadas pela equação

$$y = mx - \frac{p(1 + m^2)}{2m}$$

onde p é uma constante positiva dada e m um número real variável.

a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0 , y_0)$ do plano cartesiano, passem duas retas dessa família.

b) Determine o lugar geométrico dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

SOLUÇÃO

a) $y_0 = m x_0 - \dfrac{p(1+m^2)}{2m} \Rightarrow 2y_0 m = x_0 m^2 . 2 - p - pm^2$

$pm^2 - 2x_0 m^2 + 2y_0 m + p = 0 \Rightarrow (p - 2x_0) m^2 + 2y_0 m + p = 0$

Para que tenhamos 2 retas:.

$p - 2x_0 \neq 0$ e $\Delta = 4y_0^2 - 4(p - 2x_0) p \geq 0$

$p \neq 2x_0$ e $y_0^2 \geq p(p - 2x_0) \Rightarrow p \neq 2x_0$ e $y_0^2 \geq -2p(x_0 - p/2)$

b) $m_1 . m_2 = -1 \Rightarrow \dfrac{p}{p - 2x_0} = -1 \Rightarrow p = -p + 2x_0$

$\Rightarrow x_0 = p$, ~~[illegible]~~

O L.G. é a reta $x = p$

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 4
4ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Considere as seguintes funções:

$$f(x) = a^x \quad \text{onde} \quad a > 1$$

$$g(x) = \sqrt{2px} \quad \text{onde} \quad p > 0$$

Mostre que uma condição necessária e suficiente para que seus gráficos se tangenciem é

$$a = e^{-\frac{p}{e}}$$

Neste caso, determine, em função de p, a equação da tangente comum.

SOLUÇÃO

Os gráficos se tangenciam em $x = x_0$ sss $f(x_0) = g(x_0)$ e $f'(x_0) = g'(x_0)$

sss $\begin{cases} a^{x_0} = \sqrt{2px_0} \\ a^{x_0} \cdot \ln a = \dfrac{p}{\sqrt{2px_0}} \end{cases}$ sss $\begin{cases} a^{x_0} = \sqrt{2px_0} \\ \sqrt{2px_0} \cdot \ln a = \dfrac{p}{\sqrt{2px_0}} \end{cases}$ sss $\begin{cases} a^{x_0} = \sqrt{2px_0} \\ 2px_0 = \dfrac{p}{\ln a} \end{cases}$

sss $\begin{cases} a^{2x_0} = 2px_0 \\ 2px_0 = \dfrac{p}{\ln a} \end{cases}$ sss $a^{\frac{1}{\ln a}} = \dfrac{p}{\ln a}$ sss $a^{\frac{\ln e}{\ln a}} = \dfrac{p}{\ln a}$ sss

sss $a^{\log_a e} = \dfrac{p}{\ln a}$ sss $e = \dfrac{p}{\ln a}$ sss $\ln a = \dfrac{p}{e}$ sss $\boxed{a = e^{p/e}}$

Neste caso: $f(x_0) = g(x_0) = \sqrt{2px_0} = \sqrt{\dfrac{p}{\ln a}} = \sqrt{\dfrac{p}{\ln e^{p/e}}} = \sqrt{\dfrac{p}{p/e}} = \sqrt{e}$

$px_0 = \dfrac{p}{2\ln a} \rightarrow x_0 = \dfrac{1}{2\ln a} = \dfrac{1}{2\ln e^{p/e}} = \dfrac{1}{2\frac{p}{e}} = \dfrac{e}{2p}$

$f'(x_0) = g'(x_0) = \dfrac{p}{\sqrt{2px_0}} = \dfrac{p}{\sqrt{e}} = \dfrac{p\sqrt{e}}{e} = m_{\text{tangente}}$

Eq. da tangente comum: $y - \sqrt{e} = \dfrac{p\sqrt{e}}{e}\left(x - \dfrac{e}{2p}\right)$

$y - \sqrt{e} = \dfrac{p\sqrt{e}}{e}x - \dfrac{\sqrt{e}}{2} \rightarrow \boxed{y = \dfrac{p\sqrt{e}}{e}x + \dfrac{\sqrt{e}}{2}}$

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 6.
5ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Na elipse de excentricidade 1/2, foco na origem e reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine:

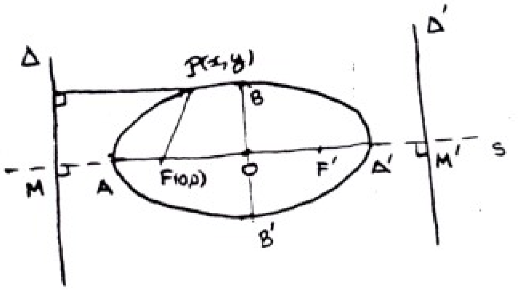
a) os vértices da elipse;

b) o outro foco;

c) a equação da outra reta diretriz.

SOLUÇÃO

$F(0,0)$; $\Delta: 3x+4y-25=0$; $e = 1/2$



$$\frac{PF}{d(P,\Delta)} = e = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|3x+4y-25|}{\sqrt{9+16}}$$

$$100(x^2+y^2) = (3x+4y-25)^2$$

$\leftarrow$ eq. da elipse

reta s: $4x-3y=0 \rightarrow y = \frac{4}{3}x$

(contém o eixo maior)

a) $s \cap$ elipse: $100\left(x^2+\frac{16}{9}x^2\right) = \left(3x+\frac{16x}{3}-25\right)^2$

$$100\cdot\frac{25}{9}x^2 = \left(\frac{25x-75}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{10.5x}{3} = \pm\frac{25x-75}{3}$$

$$2x = \pm(x-3) \rightarrow x=-3 \text{ ou } x=1 \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} A(1,4/3) \\ A'(-3,-4) \end{array}}$$

$$x=-3 \Downarrow y=-4 \qquad x=1 \Downarrow y=4/3$$

b) $O = \frac{A+A'}{2} = \frac{F+F'}{2} \rightarrow F' = A+A'-F = \left(1,\frac{4}{3}\right)+(-3,-4)-(0,0) = \boxed{\left(-2,-\frac{8}{3}\right)}$

c) $\Delta' \,//\, \Delta \rightarrow \Delta': 3x+4y=K$; $O = \frac{A+A'}{2} = (-1,-4/3)$

$$d(O,\Delta) = d(O,\Delta') \rightarrow \frac{|3.(-1)+4.(-4/3)-25|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3.(-1)+4.(-4/3)-K|}{\sqrt{9+16}}$$

$$\rightarrow K+\frac{25}{3} = \pm\frac{100}{3} \rightarrow \cancel{K=25} \text{ ou } \boxed{K=-\frac{125}{3}} \rightarrow \boxed{\Delta': 9x+12y+125=0}$$

$\leftarrow$ diretriz Δ

OBS: considerando-se B e B' também como vértices: $\overline{AA'} = 2a = \sqrt{4^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}.5 = \frac{20}{3}$

$\rightarrow a = 10/3$; $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow c = 5/3$; $b = \sqrt{a^2-c^2} = 5\sqrt{3}/3$

$\vec{OF} = F-O = (1, 4/3) \rightarrow \vec{OB} = B-O = b\frac{\vec{OF}}{|\vec{OF}|}\text{cis}(-\pi/2) = \left(1+\frac{4}{3}i\right)(-i)\,\frac{5\sqrt{3}}{3}\Big/\frac{5}{3}$

$\vec{OB} = B-O = \frac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\,i = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right) \rightarrow B = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{3}, -\frac{4+3\sqrt{3}}{3}\right)$

$\vec{OB'} = B'-O = b\frac{\vec{OF}}{|\vec{OF}|}\text{cis}\,\pi/2 = -\vec{OB} = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right) \rightarrow B' = \left(-\frac{4\sqrt{3}+3}{3}, \frac{3\sqrt{3}-4}{3}\right)$

VER VERSO

OUTRA SOLUÇÃO : (5ª QUESTÃO - 89/90)

$$\left.\begin{array}{l} F(0,0) \in \text{reta } s \\ s \perp \Delta : 3x+4y=25 \end{array}\right| \Rightarrow s: 4x-3y=0$$

$$d(F,\Delta) = \frac{|3.0+4.0-25|}{\sqrt{9+16}} = 5 = d(O,\Delta) - FO = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2-c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c = a \ ; \ \text{daí}: \ \frac{4c^2-c^2}{c} = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 5/3 \\ a = 10/3 \\ b = 5\sqrt{3}/3 \end{array}\right.$$

$$\{M\} = s \cap \Delta : \left\{\begin{array}{l} 3x+4y=25 \\ 4x-3y=0 \end{array}\right. \Rightarrow M(3,4)$$

vetor unitário : $\hat{MF} = \frac{\vec{MF}}{|\vec{MF}|} = \frac{F-M}{|\vec{MF}|} = \frac{(-3,-4)}{\sqrt{9+16}} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$$\vec{FO} = O-F = c.\hat{MF} = \frac{5}{3}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(-1, -\frac{4}{3}\right) \Rightarrow O = \left(-1, -\frac{4}{3}\right)$$

a) $\vec{OA} = A-O = -a\,\hat{MF} = -\frac{10}{3}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(2, \frac{8}{3}\right) \Rightarrow A = O + \left(2, \frac{8}{3}\right)$

$$\Rightarrow A = \left(1, \frac{4}{3}\right)$$

$$\underbrace{\vec{OA'}}_{A'-O} = -\vec{OA} = \left(-2, -\frac{8}{3}\right) \Rightarrow A' = O + \left(-2, -\frac{8}{3}\right) \Rightarrow A'(-3,-4)$$

$$\vec{OB} = B-O = b\,\hat{MF}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.\left(-\frac{1}{5}\right)(3+4i)\,i = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-4+3i) = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow B = O + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}\right) = \left(\frac{4\sqrt{3}-3}{3}, -\frac{4+3\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\vec{OB'} = B'-O = -\vec{OB} = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right) \Rightarrow B' = O + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right) \Rightarrow B' = \left(-\frac{4\sqrt{3}+3}{3}, \frac{3\sqrt{3}-4}{3}\right)$$

b) $O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow F' = 2O - F = \left(-2, -\frac{8}{3}\right) - (0,0) \Rightarrow F' = \left(-2, -\frac{8}{3}\right)$

c) $O = \frac{M+M'}{2} \Rightarrow M' = 2O - M = \left(-2, -\frac{8}{3}\right) - (3,4) \Rightarrow M' = \left(-5, -\frac{20}{3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta' /\!/ \Delta \\ M' \in \Delta' \end{array}\right| \Rightarrow \Delta': 3(x+5) + 4\left(y+\frac{20}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3x+4y+\frac{125}{3} = 0$$

$$\Delta': 9x+12y+125=0$$

6ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Considere a função $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n}$ definida em $0 < x < \infty$. Calcule o valor da f em cada ponto e esboce seu gráfico.

SOLUÇÃO

Se $\boxed{x > 1}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left[x^n\left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} x . \left(1 + \frac{1}{x^{2n}}\right)^{1/n} = x$$

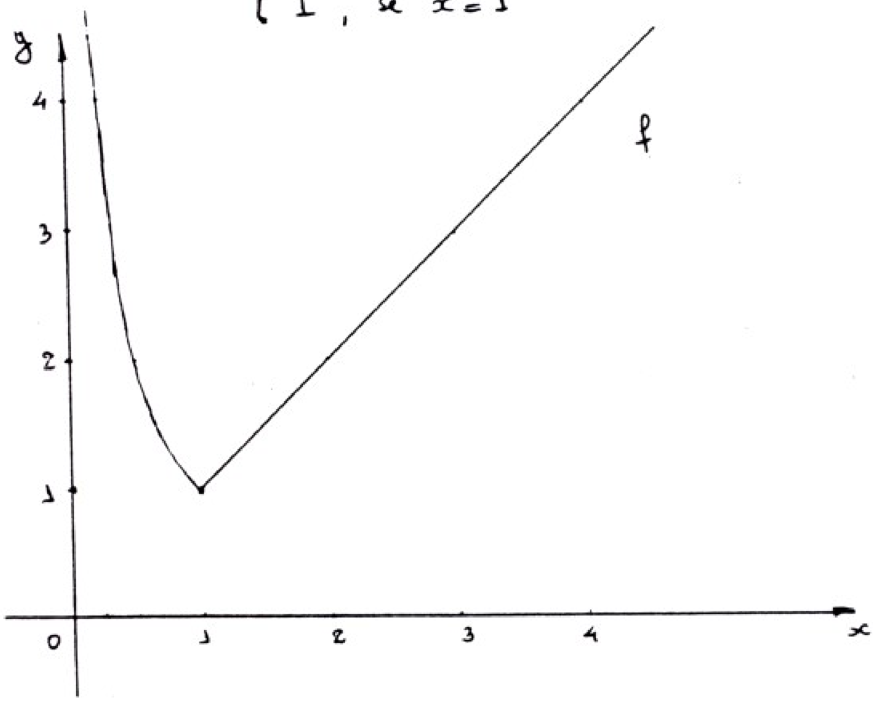
Se $\boxed{0 < x < 1}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{x^n}\left(x^{2n} + 1\right)\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} . \left(\cancel{x^{2n}} + 1\right)^{1/n} = \frac{1}{x}$$

Se $\boxed{x = 1}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1^n + \frac{1}{1^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$$

Logo: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x > 1 \\ 1/x, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases} = \text{máx}\{x, 1/x\}, \quad x \in \,]0, +\infty[$.



Resolva a equação

$$z^5 = \bar{z}$$

onde $\bar{z}$ é o conjugado do número complexo z.

SOLUÇÃO

Claramente, $\boxed{z=0}$ é solução; façamos $z = r \operatorname{cis}\theta$, onde $r>0$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Daí: $(r\operatorname{cis}\theta)^5 = \overline{r\operatorname{cis}\theta} \Rightarrow r^5 \operatorname{cis} 5\theta = r \operatorname{cis}(-\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^5 = r \\ 5\theta - (-\theta) = 2k\pi, \ \underline{k \in \mathbb{Z}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^4 = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow z = \operatorname{cis} \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$; para evitar repetição de valores, basta tomarmos $k = 0, 1, \ldots, 5$.

$k=0 \Rightarrow \operatorname{cis} 0 = 1 = z_1$

$k=1 \Rightarrow \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_2$

$k=2 \Rightarrow \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_3$

$k=3 \Rightarrow \operatorname{cis} \pi = -1 = z_4$

$k=4 \Rightarrow \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_5$

$k=5 \Rightarrow \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_6$

(e também a solução $z_7 = 0$)

IME – CEE 89/90	ÁLGEBRA, ANÁLISE E GEOMETRIA ANALÍTICA	FOLHA 11
8ª QUESTÃO		VALOR: 1,0

Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo:

$$f(1) = 1$$
$$f(2n) = 2\cdot f(n) + 1$$
$$f(f(n)) = 4n - 3$$

Calcule f(1990).

SOLUÇÃO

Análise:

① $f(1990) = 2f(995)+1$

$\underbrace{f(995)}_{f(n_1)} = 4n_1 - 3$; $f(n_1) = 995$

a $2f\left(\frac{n_1}{2}\right) + 1 = 995 \rightarrow f\left(\overbrace{\frac{n_1}{2}}^{n_2}\right) = 497$

a.1 $f(\underbrace{f(n_3)}_{n_2}) = 4n_3 - 3 = 497 \rightarrow n_3 = 125$

$\underbrace{f(\overbrace{125}^{n_3})}_{f(n_4)} = 4n_4 - 3 \rightarrow \underbrace{f(n_4)}_{f(n_5)} = 125 = 4n_5 - 3$

$\rightarrow n_5 = 32$ (daí por diante é trivial)

a.2 $2f\left(\frac{n_2}{2}\right) + 1 = 497 \rightarrow f\left(\overbrace{\frac{n_2}{2}}^{n_3}\right) = 248$

$\rightarrow f(n_3) = 248$?! (né par ...)

b $f(\underbrace{f(n_2)}_{n_1}) = 4n_2 - 3 = 995$?! (n_2 não inteiro)

① $f(\underbrace{1990}_{f(n_3)}) = 4n_3 - 3 \rightarrow f(n_3) = 1990$

a $2f\left(\frac{n_1}{2}\right) + 1 = 1990$?! ($f(n)$ não seria inteiro)

b $f(\underbrace{f(n_2)}_{n_3}) = 4n_2 - 3 = 1990$?! (n_2 não seria inteiro)

RESOLUÇÃO:

$f(2) = 2f(1)+1 = 3$; $f(4) = 2f(2)+1 = 7$; $f(8) = 2f(4)+1 = 15$; $f(16) = 2f(8)+1 = 31$;

$f(32) = 2f(16)+1 = 63$

$f(f(32)) = 4.32 - 3 = 125 \rightarrow f(63) = 125$

$f(f(63)) = 4.63 - 3 = 249 \rightarrow f(125) = 249$

$f(f(125)) = 4.125 - 3 = 497 \rightarrow f(249) = 497$

$f(498) = 2.f(249) + 1 = 2.497 + 1 = 995$

$f(f(498)) = 4.498 - 3 = 1989 \rightarrow f(995) = 1989$

$f(1990) = 2f(995) + 1 = 2.1989 + 1 \rightarrow \boxed{f(1990) = 3979}$

9ª QUESTÃO VALOR: 1,0

Imebol é um jogo de três jogadores. Em cada partida o vencedor marca $\underline{a}$ pontos, o segundo colocado marca $\underline{b}$ pontos e o terceiro colocado marca $\underline{c}$ pontos, onde $a > b > c$ são inteiros positivos. Certo dia Marcos, Flávio e Ralph resolveram jogar imebol, e após algumas partidas a soma dos pontos era:

Marcos — 20 Flávio — 10 Ralph — 9.

Sabe-se que Flávio venceu a segunda partida. Encontre quantos pontos cada um marcou em cada partida disputada.

SOLUÇÃO

Sendo $\underline{m}$ o total de partidas, temos $m \geq 2$ (pois Flávio venceu a 2ª partida); o total geral de pontos é: $(a+b+c)m = 20+10+9 = 39$

Logo, m e $a+b+c$ são divisores positivos de 39; como $c \geq 1$, $b \geq 2$ e $a \geq 3$, a única possibilidade é $m = 3$, com $a+b+c = 13$

	a	b	c
I	10	2	1
II	9	3	1
III	8	4	1
IV	7	5	1
V	8	3	2
VI	7	4	2
VII	6	5	2
VIII	6	4	3

	1ª PARTIDA	2ª PARTIDA	3ª PARTIDA
MARCOS	x_1	x_2	x_3
FLÁVIO	x_4	a	x_5
RALPH	x_6	x_7	x_8

$x_i = a, b$ ou c (notemos que, em cada coluna, os elementos são distintos)

Flávio: $x_4 + a + x_5 = 10 \rightarrow$ eliminamos as possibilidades I e II

Marcos: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ x_2 \neq a \end{cases} \rightarrow$ eliminamos as possibilidades IV a VIII

Daí: $a = 8, b = 4, c = 1$ (possibilidade III); portanto:

Flávio: $x_4 + 8 + x_5 = 10 \rightarrow x_4 = x_5 = 1 \; (=c)$

Marcos: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ x_2 \neq 8 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 = 8 \; (=a) \\ x_2 = 4 \; (=b) \end{matrix}$

Ralph: $x_6 \neq x_1$ e $x_4 \rightarrow x_6 = 4 \; (=b)$

$x_7 \neq a$ e $x_2 \rightarrow x_7 = 1 \; (=c)$

$x_8 \neq x_3$ e $x_5 \rightarrow x_8 = 4 \; (=b)$

(confirmando: $x_6 + x_7 + x_8 = 9$)

Resp:

	1ª P	2ª P	3ª P
M	8	4	8
F	1	8	1
R	4	1	4

10ª QUESTÃO — VALOR 1,0

Para que valores de p a equação $x^4 + px + 3 = 0$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

SOLUÇÃO

Sendo $f(x) = x^4 + px + 3$, temos $f'(x) = 4x^3 + p$ e $f''(x) = 12x^2$

A raiz dupla deve anular f e f' (e não f''):

$$\begin{cases} x^4 + px + 3 = 0 & \text{(I)} \\ 4x^3 + p = 0 & \text{(II)} \\ 12x^2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 0} \end{cases}$$

De (II): $4x^4 + px = 0 \Rightarrow x^4 = -\dfrac{px}{4}$

Em (I): $-\dfrac{px}{4} + px + 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{4}{p}$ (III)

Em (II): $4 \cdot \left(-\dfrac{4}{p}\right)^3 + p = 0 \Rightarrow p^4 = 4^4 \Rightarrow \boxed{p = \pm 4 \text{ ou } p = \pm 4i}$

Em (III):

$p = 4 \Rightarrow x = -1$ (raiz dupla) ; $\dfrac{x^4 + 4x + 3}{(x+1)^2} = x^2 - 2x + 3$

outras raízes: $\dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i$

$p = -4 \Rightarrow x = 1$ (raiz dupla) ; $\dfrac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2} = x^2 + 2x + 3$

outras raízes: $\dfrac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\, i$

$p = 4i \Rightarrow x = i$ (raiz dupla) ; $\dfrac{x^4 + 4ix + 3}{(x-i)^2} = x^2 + 2ix - 3$

outras raízes: $\dfrac{-2i \pm \sqrt{8}}{2} = \pm\sqrt{2} - i$

$p = -4i \Rightarrow x = -i$ (raiz dupla) ; $\dfrac{x^4 - 4ix + 3}{(x+i)^2} = x^2 - 2ix - 3$

outras raízes: $\dfrac{2i \pm \sqrt{8}}{2} = \pm\sqrt{2} + i$