ITA 2007
MATEMÁTICA

Vestibular

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$: conjuntodosnúmerosinteiros
$\mathbb{Q}$: conjuntodosnúmerosracionais
$\mathbb{R}$: conjuntodosnúmerosreais
$\mathbb{C}$: conjuntodosnúmeroscomplexos

i: unidadeimaginária;$i^2 = -1$
$|z|$: módulodonúmero$z \in \mathbb{C}$
$\overline{z}$: conjugadodonúmero$z \in \mathbb{C}$
$Re\, z$: parterealde$z \in \mathbb{C}$
$Im\, z$: parteimagináriade$z \in \mathbb{C}$

$\binom{n}{p}$: número de combinações de n elementos tomados p a p.

$\mathrm{mdc}(j, k)$: máximo divisor comum dos números inteiros j e k.

$n(X)$: número de elementos de um conjunto finito X.

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.

Questão 01. Se A, B, C forem conjuntos tais que

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= 23, \;\; n(B - A) = 12, \;\; n(C - A) = 10, \\ n(B \cap C) &= 6 \;\text{ e }\; n(A \cap B \cap C) = 4, \end{aligned}$$

então $n(A)$, $n(A \cup C)$, $n(A \cup B \cup C)$, nesta ordem,

A ( ) formam uma progressão aritmética de razão 6.
B ( ) formam uma progressão aritmética de razão 2.
C ( ) formam uma progressão aritmética de razão 8, cujo primeiro termo é 11.
D ( ) formam uma progressão aritmética de razão 10, cujo último termo é 31.
E ( ) não formam uma progressão aritmética.

Questão 02. Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

A ( ) $2^8 - 9$. **B** ( ) $2^8 - 1$. **C** ( ) $2^8 - 2^6$. **D** ( ) $2^{14} - 2^8$. **E** ( ) 2^8.

Questão 03. Considere a equação:

$$16\left(\frac{1 - ix}{1 + ix}\right)^3 = \left(\frac{1 + i}{1 - i} - \frac{1 - i}{1 + i}\right)^4.$$

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

A ( ) 3. **B** ( ) 6. **C** ( ) 9. **D**( ) 12. **E** ( ) 15.

Questão 04. Assinale a opção que indica o módulo do número complexo

$$\frac{1}{1+i\operatorname{cotg} x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A ( ) $|\cos x|$ **B** ( ) $(1+ \mathit{sen}\, x)/2$ **C** ( ) $\cos^2 x$
D ( ) $|\operatorname{cossec} x|$ **E** ( ) $|\mathit{sen}\, x|$

Questão 05. Considere: um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

A ( ) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0.$ **B** ( ) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0.$
C ( ) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0.$ **D** ( ) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$
E ( ) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0.$

Questão 06. Se as medidas dos lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica de razão r, então r pertence ao intervalo

A ( ) $\left(0, (1+\sqrt{2})/2\right).$

B ( ) $\left((1+\sqrt{2})/2, \sqrt{(1+\sqrt{5})/2}\right).$

C ( ) $\left(\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}, (1+\sqrt{5})/2\right).$

D ( ) $\left((1+\sqrt{5})/2, \sqrt{2+\sqrt{2}/2}\right).$

E ( ) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}/2}, (2+\sqrt{3})/2\right).$

Questão 07. Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base k são números primos satisfazendo

$$\begin{aligned} \log_k(xy) &= 49, \\ \log_k(x/z) &= 44. \end{aligned}$$

Então, $\log_k(xyz)$ é igual a

A ( ) 52. **B** ( ) 61. **C** ( ) 67. **D** ( ) 80. **E** ( ) 97.

Questão 08. Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma $x + y$ é igual a

A ( ) 0. **B** ( ) 1. **C** ( ) $2\log_5 3.$ **D** ( ) $\log_5 2.$ **E** ( ) $3\log_e 2.$

Questão 09. Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

A ( ) 9. **B** ( ) 7. **C** ( ) 5. **D** ( ) 3. **E** ( ) 1.

Questão 10. Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos

$$(x + a)^3 - (x + b)^3.$$

Neste caso, $|\, a + |\, b \,| - c \,|$ é igual a

A ( ) 104. **B** ( ) 114. **C** ( ) 124. **D**( ) 134. **E** ( ) 144.

Questão 11. Sobre a equação na variável real x,

$$|\,|\,|\, x - 1 \,| - 3 \,| - 2 \,| = 0,$$

podemos afirmar que

A ( ) ela não admite solução real.
B ( ) a soma de todas as suas soluções é 6.
C ( ) ela admite apenas soluções positivas.
D ( ) a soma de todas as soluções é 4.
E ( ) ela admite apenas duas soluções reais.

Questão 12. Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

A ( ) 204 **B** ( ) 206 **C** ( ) 208 **D**( ) 210 **E** ( ) 212

Questão 13. Seja x um número real no intervalo $0 < x < \pi/2$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

A ( ) $\pi/2$ **B** ( ) $\pi/3$ **C** ( ) $\pi/4$ **D** ( ) $\pi/6$ **E** ( ) $\pi/12$

Questão 14. Assinale a opção que indica a soma dos elementos de $A \cup B$, sendo:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x_k = sen^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\} \text{ e} \\ B &= \left\{ y_k = sen^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\}. \end{aligned}$$

A ( ) 0 **B** ( ) 1 **C** ( ) 2
D ( ) $\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)/3$ **E** ( ) $\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)/3$

Questão 15. Sejam $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$, duas matrizes quadradas $n \times n$, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por

$$a_{jk} = \binom{j}{k}, \quad \text{quando} \quad j \geq k\ , \qquad a_{jk} = \binom{k}{j}, \quad \text{quando} \quad j < k$$

e

$$b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}.$$

O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem $n \times n$ é definido por $\sum_{p=1}^{n} c_{pp}$. Quando n for ímpar, o traço de $A + B$ é igual a

A ( ) $n(n-1)/3$. **B** ( ) $(n-1)(n+1)/4$. **C** ( ) $(n^2 - 3n + 2)/(n-2)$.
D ( ) $3(n-1)/n$. **E** ( ) $(n-1)/(n-2)$.

Questão 16. Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$, $x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede

A ( ) 15/2. **B** ( ) 13/4. **C** ( ) 11/6. **D** ( ) 9/4. **E** ( ) 7/2.

Questão 17. Sejam $A : (a, 0)$, $B : (0, a)$ e $C : (a, a)$, pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos $P : (x, y)$ cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

A ( ) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$
B ( ) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
C ( ) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
D ( ) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$
E ( ) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Questão 18. Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades

$$b_n \leq a_n \quad \text{e} \quad b_{n-1} > a_{n-1},$$

pertence ao intervalo

A ( ) $3 < n < 7$. **B** ( ) $6 < n < 9$. **C** ( ) $8 < n < 11$.
D ( ) $10 < n < 13$. **E** ( ) $12 < n < 15$.

Questão 19. Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão A_1/A_2 é igual a

A ( ) $\sqrt{5/8}$. **B** ( ) $9\sqrt{2}/16$. **C** ( ) $2(\sqrt{2} - 1)$.
D ( ) $(4\sqrt{2} + 1)/8$. **E** ( ) $(2 + \sqrt{2})/4$.

Questão 20. Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

A ( ) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. **B** ( ) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/3$. **C** ( ) $(3\sqrt{3}-\sqrt{6})/21$.
D ( ) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})/6$. **E** ( ) $(2\sqrt{6}-\sqrt{2})/22$.

As questões dissertativas, numeradas de 21 a 30, devem ser resolvidas e respondidas no caderno de soluções.

Questão 21. Determine o conjunto C, sendo A, B e C conjuntos de números reais tais que

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 2\}, \\ A \cup B &= \left\{x \in \mathbb{R} : 8^{-x} - 3 \cdot 4^{-x} - 2^{2-x} > 0\right\}, \\ A \cap C &= \{x \in \mathbb{R} : \log(x+4) \leq 0\}, \\ B \cap C &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x + 7 < 2\}. \end{aligned}$$

Questão 22. Determine o conjunto A formado por todos os números complexos z tais que

$$\frac{\overline{z}}{z-2i} + \frac{2z}{\overline{z}+2i} = 3 \quad \text{e} \quad 0 < |z-2i| \leq 1.$$

Questão 23. Seja k um número inteiro positivo e

$$A_k = \{\ j \in \mathbb{N} : j \leq k \text{ e } \mathrm{mdc}(j,k) = 1\ \}.$$

Verifique se $n(A_3)$, $n(A_9)$, $n(A_{27})$ e $n(A_{81})$, estão ou não, nesta ordem, numa progressão aritmética ou geométrica. Se for o caso, especifique a razão.

Questão 24. Considere a equação:

$$\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x.$$

(a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?
(b) Determine todas essas raízes reais.

Questão 25. Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} \log\left[(x+2y)(w-3z)^{-1}\right] &= 0, \\ 2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} &= 0, \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Questão 26. Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

Questão 27. Considere um triângulo isósceles ABC, retângulo em B. Sobre o lado $\overline{BC}$, considere, a partir de B, os pontos D e E, tais que os comprimentos dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, nesta ordem, formem uma progressão geométrica decrescente. Se β for o ângulo $E\widehat{A}D$, determine $\operatorname{tg}\beta$ em função da razão r da progressão.

Questão 28. Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em $P : (5, 10)$. O ponto $Q : (10, 12)$ é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equaçã o $x = y$.

Questão 29. Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triâ ngulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

Questão 30. Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3$ cm^3, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio. Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

ITA Matemática 2007 - Gabarito

01. D	**02.** A	**03.** B	**04.** E
05. D			

06. Anular*
*Os alunos que considerarem r > 1, obterão como resposta C.

07. A	**08.** E	**09.** B	**10.** B
11. D	**12.** E	**13.** D	**14.** C
15. C	**16.** A	**17.** A	**18.** B
19. E	**20.** C		

Discursivas

21. O conjunto C pode ser dado por:

$C = [(A \cup B \cup C) - (A \cup B)] \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Determinamos então cada conjunto do segundo membro:

$A \cup B \cup C : x^2 + x \geq 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow$

$x + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$ ou $x + \frac{1}{2} \leq \frac{-3}{2} \Rightarrow$

$A \cup B \cup C = \{x \in R \,/\, x \geq 1 \text{ ou } x \leq -2\}$

$A \cup B : 8^{-x} - 3.4^{-x} - 2^{2-x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2^{3x}} - \frac{3}{2^{2x}} - \frac{4}{2^x} > 0 \Rightarrow$

$2^{-2x} - 3.2^{-x} - 4 > 0$. Seja $a = +2^{-x}$, então

$a^2 - 3a - 4 > 0 \Rightarrow \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{25}{4} \Rightarrow a - \frac{3}{2} > \frac{5}{2}$ ou

$a - \frac{3}{2} < -\frac{5}{2} \Rightarrow a > 4$ ou $a < -1$; como

$a = 2^{-x} > 0, \forall x \in R$, então $2^{-x} > 4 \Rightarrow 2^x < 2^{-2} \Rightarrow$

$x < -2 \therefore A \cup B \{x \in R \,/\, x < -2\}$

$A \cap C : \log(x+4) \leq 0$, com $0 < x + 4$; então temos que:

$\log(x+4) \leq 0 \Rightarrow x + 4 \leq 1 \Rightarrow x \leq -3$, como $x > 4 > 0 \Rightarrow$

$-4 < x \leq -3 \therefore A \cap C : \{x \in R \,/ -4x \leq -3\}$

$B \cap C :\ 0 \leq 2x + 7 < 2 \Rightarrow \frac{-7}{2} \leq x < \frac{-5}{2} \Rightarrow$

$B \cap C = \left\{x \in R \,/\, \frac{-7}{2} \leq x < \frac{-5}{2}\right\}$

Chegamos então que

$$\boxed{C = \left\{x \in R \,/ -4 < x \leq \frac{-5}{2} \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x \geq 1\right\}}$$

22. 1ª solução

Fazendo $w = \frac{\bar{z}}{z - 2i}$, temos que $\frac{2z}{\bar{z} + 2i} = 2.\bar{w}$. Substituindo, temos $w + 2.\bar{w} = 3$. Fazendo w = a +bi, vem 3a -2bi = 3, logo a = 1 e b = 0, ou seja, w = 1. Portanto,

$$\frac{\bar{z}}{z - 2i} = 1 \Rightarrow \bar{z} = z - 2i\ .$$

Substituindo z por x + iy, temos:

$x - iy = x + i.y - 2i \Rightarrow -y = y - 2 \Rightarrow y = 1$

Como

$0 < |z - 2i| \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{x^2 + (1-2)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{x^2 + 1} \leq 1$

$$0 < x^2 + 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 0 \Rightarrow x = 0\ .$$

Portanto, z = x + iy = i, ou seja, $\boxed{\mathbf{A = \{i\}}}$.

2ª solução (independente da 1ª)

Fazendo $\frac{\bar{z}}{z - 2i} = w$, com z ≠ 2i, temos:

$w + 2\,\bar{w} = 3$ (I)

Seja w = a + bi. Logo, de (I):

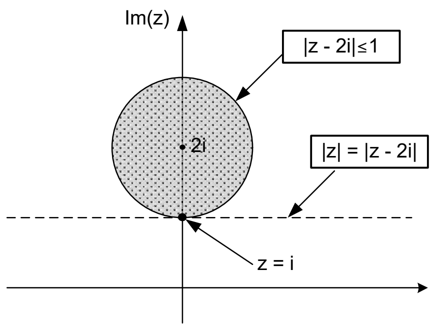
3a – bi = 3 ⇔ a = 1; b = 0 ⇔ w = 1

Assim, $|w| = 1$ de onde:

$\left|\frac{\bar{z}}{z - 2i}\right| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z}| = |z - 2i| \Leftrightarrow |z| = |z - 2i|$

A solução da última equação é a reta mediatriz dos pontos z = 0 e z = 2i, ou seja, é conjunto dos pontos da forma z= x + i, $x \in R$ (II)

Já o conjunto de pontos que satisfaz $0 < |z - 2i| \leq 1$ (III) é o círculo de centro no ponto $z = 2i$ e raio 1, excluindo-se o próprio centro do círculo.



A intersecção entre (II) e (III) dá z = i, que é a única solução do sistema. $\boxed{\mathbf{A = \{i\}}}$

23. A_3 = { j∈N : j ≤ 3 e mdc (3,k) =1 }, ou seja A_3 é o conjunto de todos os naturais j menores que 3 tais que j e 3 são primos entre si. Logo

A_3 = {1,2} e n(A_3) = 2

A_9 = { j∈N : j ≤ 9 e mdc (9,k) =1 }, ou seja A_9 é o conjunto de todos os naturais j menores que 9 tais que j e 9 são primos entre si. Logo

A_9 = {1,2,4,5,7,8} e n(A_3) = 6. Note que como $9=3^2$, basta que j não seja múltiplo de 3 para que a condição seja atendida. De 1 a 9, 2/3 dos números não são múltiplos de 3, logo A_9 tem 6 elementos (2/3 de 9)

Como 27 = 3^3, vale a analogia e A_{27} terá 2/3 de 27 = 18 elementos.
Inferimos também que A_{81} terá 2/3 de 81 = 54 elementos.
A sucessão (2, 6, 18, 54) caracteriza uma PG de razão q=3.

24. a) Para que as raízes quadradas pertençam aos reais, temos duas condições:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \text{ e } x^2 - p \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq p$$

A partir da equação inicial:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2.\sqrt{x^2 - 1} = x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 - p}\right)^2 = \left(x - 2\sqrt{x^2 - 1}\right)^2$$

$$x^2 - p = x^2 - 4x\sqrt{x^2 - 1} + 4x^2 - 4$$

$$4x\sqrt{x^2 - 1} = p + 4x^2 - 4$$

$$\Rightarrow\left(4x\sqrt{x^2-1}\right)^2=\left(p+4x^2-4\right)^2$$

$$16x^4-16x^2=p^2+16x^4+16+8px^2-8p-32x^2$$

$$(16-8p)x^2-p^2-16+8p=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{8p-p^2-16}{8p-16}=\frac{-(p-4)^2}{8(p-2)}=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}$$

Da condição $x^2\ge p$, temos

$$\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}\ge p\Rightarrow\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}-p\ge 0\Rightarrow\frac{9p^2-24p+16}{16-8p}\ge 0$$

Considerando apenas o numerador e igualando-o a zero, temos:

$$\Delta=(-24)^2-4.9.16=0$$

Logo, para qualquer valor real de p temos que $9p^2-24p+16\ge 0$ e assume valor nulo em $p=\frac{24\pm 0}{18}=\frac{4}{3}$. Assim, como o numerador sempre é não-negativo, segue que $16-8p>0\Rightarrow p<2$

Como a equação do enunciado deve ser satisfeita:

$$\left(\sqrt{x^2-p}+2.\sqrt{x^2-1}\right)^2=x^2:$$

$$(x^2-p)+4(x^2-1)+4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=x^2$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)}=p-4x^2+4$$

Como a raiz deve existir, segue que $p-4x^2+4\ge 0$.

$$\Rightarrow x^2\le\frac{p+4}{4}\Rightarrow x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}\le\frac{p+4}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{p^2-8p+16}{2(2-p)}-p-4\le 0\Rightarrow$$

$$\frac{p^2-8p+16-(4-2p)(p+4)}{4-2p}\le 0$$

Como $4-2p>0$ (pois p < 2), temos:

$$p^2-8p+16-4p-16+2p^2+8p\le 0$$

$$\Rightarrow 3p^2-4p\le 0\Rightarrow\boxed{0\le p\le\frac{4}{3}}.$$

b) Se $0\le p\le\frac{4}{3}$, temos então:

$$x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}\Rightarrow x=\frac{|p-4|}{2\sqrt{4-2p}}=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\Rightarrow$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right\}}$$

25.

$$\begin{cases}\log\left[(x+2y)(w-3z)^{-1}\right]=0\Rightarrow\left[(x+2y)(w-3z)^{-1}\right]=1\Rightarrow\\ 2^{x+3z}-8.2^{y-3z+w}=0\Rightarrow 2^{x+3z}-2^{y-3z+w+3}=0\Rightarrow\\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w}-2=0\Rightarrow\sqrt[3]{2x+y+6z-2w}=2\Rightarrow\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y=w-3z\Rightarrow x+2y+3z-w=0(i)\\ x+3z=y-3z+w+3\Rightarrow x-y+6z-w=3(ii)\\ 2x+y+6z-2w=8(iii)\end{cases}$$

Deve-se notar que $w-3z\ne 0$, ou seja $w\ne 3z$

Fazendo-se a combinação linear (iv) = (i)+(ii)-(iii), obtém-se:

$$3z=-5\Rightarrow z=-\frac{5}{3}$$

Substituindo o valor de z nas equações, tem-se:

$$\begin{cases}x+2y-w=5(i)\\ x-y-w=13(ii)\\ 2x+y-2w=18(iii)\end{cases}$$

Fazendo agora a combinação linear (v) = (i)-(ii), encontra-se:

$$3y=-8\Rightarrow y=-\frac{8}{3}$$

Substituindo o valor de y nas expressões acima, obtém-se:

$$x-w=\frac{31}{3}\Rightarrow w=x-\frac{31}{3};$$

$$w\ne 3z=-5\Rightarrow x\ne\frac{16}{3}$$

O conjunto solução do sistema é dado por: (x;y;z;w)

$\boxed{S=\left\{(x;-\frac{8}{3};-\frac{5}{3};x-\frac{31}{3}),x\ne\frac{16}{3}\right\}}$ ou ainda,

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{31}{3}+w,-\frac{8}{3},-\frac{5}{3},w\right),w\ne -5\right\}}$$

26.

Comissão com 5 pessoas com pelos menos uma moça e um rapaz. Logo, o que não poderá ocorrer é escolher 5 pessoas em que não haja nenhum homem ou nenhuma mulher.

Escolha de 5 pessoas quaisquer, independente do sexo:

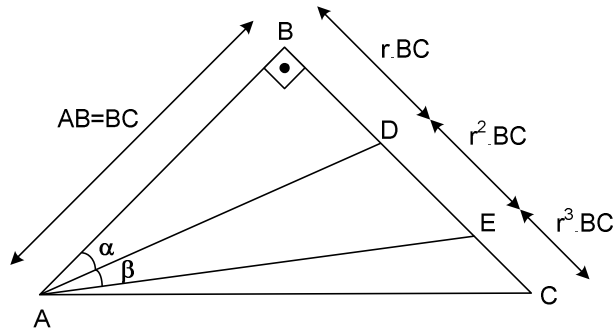
$$C_{9,5}=\frac{9!}{5!\,4!}=126$$

Escolha de 5 pessoas do mesmo sexo,

Como temos apenas 4 mulheres, não será possível formar comissões apenas com mulheres, logo há apenas uma comissão com 5 homens.

Portanto, temos 126 – 1, ou seja, **125 comissões com pelo menos um homem e uma mulher.**

27.



O triângulo ABC é isósceles, ou seja, AB=BC. Da figura acima, temos:

$$tg\,\alpha=r$$

$$tg(\alpha+\beta)=r+r^2$$

Como desejamos encontrar $tg\,\beta$, basta fazermos:

$$tg\,\beta=tg(\alpha+\beta-\alpha)=\frac{tg(\alpha+\beta)-tg\,\alpha}{1+tg(\alpha+\beta)tg\,\alpha}$$

$$tg\,\beta=\frac{r+r^2-r}{1+(r+r^2)r}\Leftrightarrow\boxed{tg\,\beta=\frac{r^2}{r^3+r^2+1}}$$

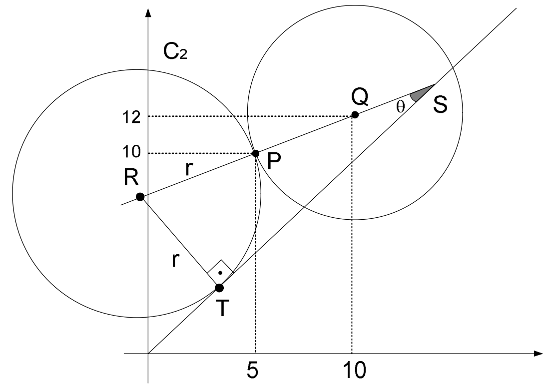
Usando o desenho acima, observe que:

$$BC=r.BC+r^2.BC+r^3.BC$$

$$\Rightarrow 1=r+r^2+r^3\Rightarrow r^3+r^2=1-r$$

Substituindo em tgβ, fica $\boxed{tg\,\beta=\frac{r^2}{2-r}}$

28.



Sejam R e T, respectivamente, o centro de C_2 e o ponto de tangência entre $x - y = 0$ e C_2. Por condição de tangência, devemos ter Q, P e R alinhados.

Determinemos a equação da reta PQ, que tem coeficiente angular igual a $\frac{12-10}{10-5} = \frac{2}{5}$.

PQ: $y - 12 = \frac{2}{5}(x-10) \Leftrightarrow 2x - 5y = -40$

Encontraremos o ponto S, intersecção da reta $x-y = 0$ e da reta PQ: $\begin{vmatrix} x - y = 0 \\ 2x - 5y = -40 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3x = -40 \\ -3y = -40 \end{matrix} \Leftrightarrow S = \left(\frac{40}{3}, \frac{40}{3}\right)$

Assim, $PS = \sqrt{\left(\frac{40}{3} - 5^2\right) + \left(\frac{40}{3} - 10\right)^2} = \sqrt{\frac{725}{9}} = \frac{5\sqrt{29}}{3}$

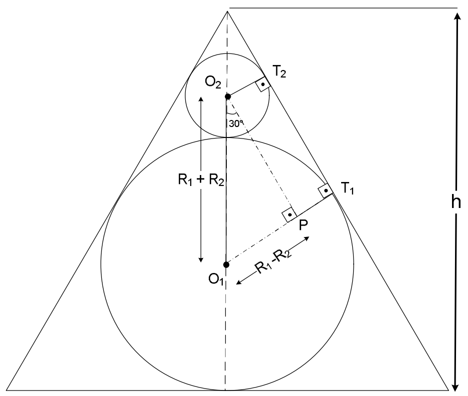
Sendo θ o ângulo agudo entre PQ e $y = x$, temos:

$$tg\theta \left|\frac{1 - \frac{2}{5}}{1 + 1.\frac{2}{5}}\right| = \frac{3}{7} \rightarrow sen\theta = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

Chamamos de r o raio de C_2. No triângulo STR, temos:

$$\frac{RT}{RS} = sen\theta \Leftrightarrow \frac{r}{r + \frac{5\sqrt{29}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{58}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{145\sqrt{2} + 15\sqrt{29}}{49}}$$

29.



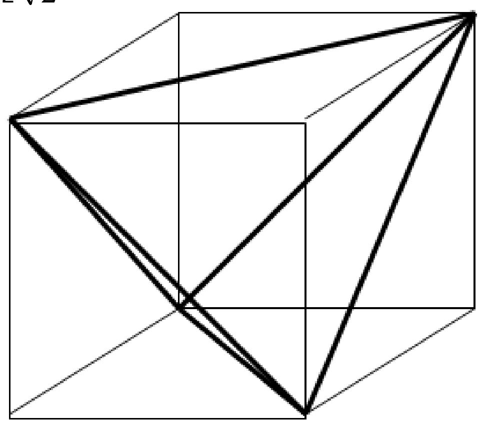
Sendo O_1 e O_2 os centros das circunferências temos:
$O_1T_1 = R_1$ e $O_2T_2 = R_2$

$$sen\ 30° = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_1 = 3R_2$$

Como se trata de um triangulo equilátero, então $h = 3R_1$
Logo:

$$\boxed{\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{R_1 - \frac{R_1}{3}}{3R_1} = \frac{2}{9}}$$

30. Seja b a aresta do tetraedro, então $8/3 = b^3\sqrt{2}/12 \rightarrow b = 2\sqrt{2}$



O tetraedro regular possui aresta $a\sqrt{2}$ e seu volume é dado por $V_{tetraedro} = \frac{(a\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3}{3} = \frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow V_{cubo} = 8\ cm^3$

Em cada vértice, a parte da esfera interior ao cubo corresponde a um oitavo da mesma. Assim, a soma dos volumes das regiões internas ao cubo nas oito esferas vale:

$$V_{int} = 8.\frac{1}{8}.\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Calculando o volume V da região do cubo, externa as esferas:

$$\boxed{V = V_{cubo} - V_{int} = (8 - \frac{4\pi}{3})cm^3}$$

Cortesia:
Resoluções Alferes Vestibulares